UOT 519.854.6

MÜSTƏVİDƏ MƏHDUD OBLASTIN SADƏ TİPLİ ELEMENTLƏRLƏ ÖRTÜLMƏSİNİN OPTİMALLAŞDIRILMASI ALQORİTMİ

R.R. Məhərrəmov[1], E.Q. Həşimov[1], S.R. Kəlbiyeva[2]
(AMEA-nın akademiki F.Ə.Əliyev tərəfindən təqdim edilmişdir)

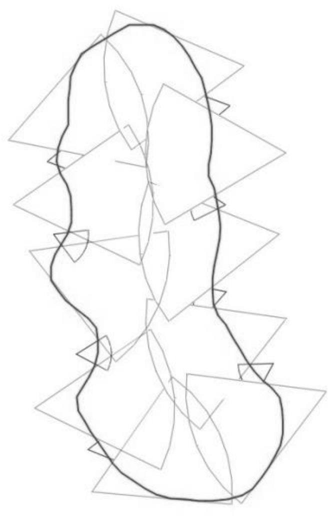
Məqalədə müstəvi üzərində verilmiş məhdud oblastın sadə fiqurlarla örtülməsi məsələsinə baxılır. Sadə fiqurlar kimi mərkəzləri məhdud oblastın xaricində olan dairə sektorları götürülür. Müxtəlif radiuslu dairə sektorlarınıın mərkəzi nöqtələrini elə seçmək tələb olunur ki, bu sektorlar, məhdud oblastı tamamilə örtsün və cəminin məhdud oblastın sahəsinə olan nisbəti minimum olsun.

Açar sözlər: *optimal örtmə, oblastın diskretləşdirilməsi, diskret optimallaşdırma*

Giriş

Müstəvi üzərində olan oblastın sadə fiqurlar ilə örtülməsi məsələsi bir çox iqtisadi, texniki, coğrafi məsələlərin həllində qarşıya çıxan mühüm problemlərdən biridir. Hərbi xarakterli bəzi məsələlər də bu problemə gətirilə bilər. Qeyd etmək lazımdır ki, çoxluğun sadə elementlərlə xarici (örtülmə) və daxili (yerləşdirmə) approksimasiya məsələsi Laqranj və Qaus zamanlarından məlum olmuşdur. Məsələn [1-3] işlərində müxtəlif müstəvidə müəyyən oblastın kiçikdiametrli dairələrlə örtülməsi məsələsinə baxmışlar. [4] işində P.D. Lebedev qabarıq olmayan birəlaqəli çoxluğun dairələrlə optimal örtülməsi üçün iterasiya üsulu təklif etmişdir. Bu tip problemlər regionlarda nəqliyyat şəbəkəsinin qurulması və ya kompüter şəbəkələrində server mərkəzlərinin tapılması məsələlərində də qarşıya çıxa bilər. [5, 6]

Bu tip işlərin təhlili göstərir ki, burada sadə fiqurlar, əsasən, dairə formasında olur ki, onların da mərkəzi örtülən oblastın daxilində yerləşir. Dairə mərkəzlərinin örtüləcək oblastın xaricində yerləşdiyi hallar da maraq kəsb edir. Bu halda, dairənin bir hissəsi oblastdan kənarda qaldığından belə örtməyə ehtiyac qalmır. Bütün dairənin deyil, onun müəyyən mərkəzi bucağa malik olan sektoru ilə örtmə əməliyyatını aparmaq daha məqsədəuyğundur. Qeyd edək ki, [1-6] işlərdə hər hansı oblastın optimal örtülməsi məsələsi həll edilir ki, bu da oblastın ən kiçik radiuslu dailələrlə örtülməsini ehtiva edir. Məhdud qabarıq olmayan oblastın mərkəzləri bu oblastdan kənarda yerləşən verilmiş radiuslu dairə sektorları ilə optimal örtülməsi dedikdə o başa düşülə bilər ki, bu sektorların birləşməsi oblastı tamamilə örtsün və bu sektorların örtüləcək oblast ilə kəsişmələrinin sahələri cəmi maksimum olsun.



Şəkil 1. Qabarıq olmayan oblastın sektorlarla örtülməsi

1. Məsələnin qoyuluşu. Fərz edək ki, D müstəvi üzərində yerləşən, məhdud, ümumiyyətlə qabarıq olmayan bir oblastdır (şək.1). Müstəvi üzərində yerləşən və D oblastına daxil olmayan bir n sayda $\{O_i\}$ nöqtələri çoxluğu götürək ki, bu çoxluğun hər bir elementi üçün $O_i \notin D$ olsun. Yəni O_i nöqtələri müstəvidə D oblastından kənarda yerləşir. Bundan başqa fərz edək ki, mərkəzləri O_i nöqtələrində olan müxtəlif radiuslu dairələr çəkilmişdir. Bu dairələrin mərkəzi bucağı α olan sektorlarını götürək və onları $P(O_i, r_i, \alpha)$ işarə edək. Qeyd edək ki, burada bəzi sektorların r_i radiusları üst-üstə düşə bilər. Radiusları müxtəlif olan sektorların sayını κ ilə işarə edək. Aydındır ki, $\kappa \le n$ olacaqdır.

Tərif 1. $D \subset U_{i=1}^{n} P(O_i, r_i, \alpha)$ münasibəti ödənildiyi təqdirdə deyəcəyik ki, $\{P(O_i, r_i, \alpha)\}$ sektor toplusu D oblastını örtür.

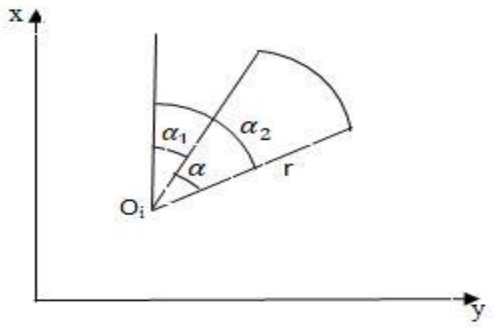
Tərif 2. D oblastını örtən $\{P(O_i, r_i, \alpha)\}$ sektor toplusu o zaman optimal örtük adlanır ki, onların D oblastından kənarda qalan hissələrin sahələrinin cəmi minumum olsun. Yəni,

$$J = \sum_{i=1}^{n} S(P(O_i, r_i, \alpha) \setminus D \to \min \qquad (1)$$

Burada, $S(K)$ müstəvidəki K oblastının sahəsidir.

Tərif 1-dən göründüyü kimi D oblastının $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektor toplusu ilə örtülməsi o deməkdir ki, hər bir $(x, y) \notin D$ nöqtəsi üçün elə birv $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektoru var ki, onun üçün $(x, y) \notin P(O_i, r_i, \alpha)$. Qeyd edək ki, belə $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektorları bir neçə də ola bilər. Optimal örtüyün tapılması alqoritmi ondan ibarət olacaqdır ki, sektorların $\{O_i\}$ mərkəz nöqtələrinin yeri elə dəyişdirilməlidir və elə $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektorları qurulmalıdır ki, $\{P(O_i, r_i, \alpha)\}$ sektor toplusu D oblastını örtsün və (1) ifadəsinə minumum versin.

Qeyd edək ki, $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektoru birqiymətli təyin olunur. Belə ki, dairədə O_i mərkəzi bucağı α olan istənilən qədər sektor götürmək olar. Belə sektoru birqiymətli vermək üçün dairənin mərkəzi O_i və radiusu r_1 kəmiyyətlərini və α mərkəzi bucağını vermək kifayət deyil. Sektorun birqiymət alması üçün α bucağını əmələ gətirən tərəflərin, yəni dairənin radiuslarının istiqamətləri də konkret olaraq verilməlidir. Fərz edək ki, həmin istiqamətlərin azimutları uyğun olaraq, α_1 və α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) olsun (şək.2).



Şəkil 2. Mərkəzi O olan və $\boldsymbol{\alpha}$ mərkəzi bucaqlı sektor

Şəkil 2-dən göründüyü kimi $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ şəklində tapıla bilər. Yəni o mərkəzini və r radiusunu, habelə sektoru təşkil edən radiuslara uyğun azimutları versək, onda $P(O_i, r_i, \alpha)$ birqiymətli təyin oluna bilər. Bu halda i nömrəli sektoru $P(O_i, r_i, \alpha_1^i, \alpha_2^i)$ şəklində vermək daha məqsədəuyğundur. Bu halda, məsələ elə O_i mərkəz nöqtəsinin və buna uyğun elə α_1^i, α_2^i azimutlarının tapılması məsələsinə gətirilir ki, (1) münasibəti ödənilsin. Burada, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ şərti ödənilməlidir. α konkret sabit bir bucaq olarsa, onda təkcə α_1 (yaxud da α_2) bucağının tapılması kifayətdir. Burada fərz edilir ki, r_i radiusları ixtiyari deyil və onlar konkret qiymətlər alırlar. Bizim halda fərz edirik ki, sektorlar iki müxtəlif (r və R) radiuslu sektorlardır. Bundan əlavə fərz edək ki, r radiuslu sektorların sayı m, R radiuslu sektorların sayı l -dir. Bu halda, $n = m + l$ olacaqdır.

2. Oblastın optimal örtüyünün tapılması alqoritmi. İndi isə tərif 2-yə uyğun optimal örtüyün alqoritminin tapılması məsələsinə baxaq. Əvvəlcə (1) düsturu təyin edilmiş funksiyanın şəklini dəyişdirəcək. O_i nöqtələri müstəvidə verilmiş nöqtələr olduğundan onların X_0Y Dekart koordinat sistemində $O_i(x_i, y_i)$ şəklində göstərilə bilər. Bu halda, $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektorunu $P(x_i, y_i, r_i, \alpha)$ şəklində yaza bilərik. Onda $S(P(x_i, y_i, r_i, \alpha = F_i(x_i, y_i)$ şəklində yazıla bilər. r_i-lər ya r, ya da R-ə bərabər olduqlarından, biz m sayda $F_2(x_i, y_i) = F_i(x_i, y_i)$ $(i = \overline{1, m})$ və l sayda $F_R(x_i, y_i) = F_i(x_i, y_i)$ $(i = \overline{m+1, m+l}$ funksiyalarını alırıq. Onda (1) ifadəsindən funksiyanı

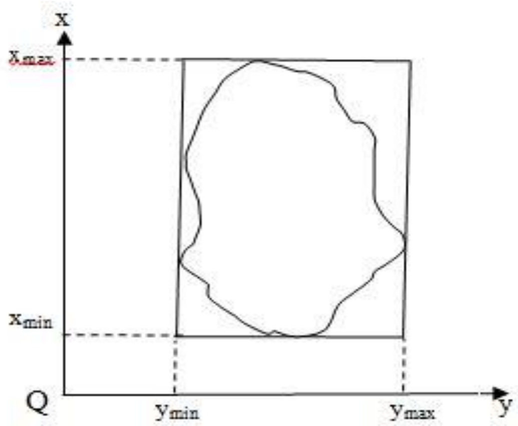
$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n2} F_2(x_i, y_i) + \sum_{i=m+1}^{m+l} F_R(x_i, y_i) \quad (2)$$

şəklində yaza bilərik. Beləliklə, optimal örtüyün tapılması məsələsi elə $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_m, y_m)\}$ və $\{(x_{m+1}, y_{m+1}), \ldots (x_m, y_m)\}$ nöqtələrinin tapılması məsələsinə gətirilir ki, (2) funksiyası minumum qiymət alsın.

Məsələnin qoyuluşunda fərz etmişdik ki, O_i nöqtələri D oblastının daxili nöqtəsi deyil. Bu isə o deməkdir ki, $(x_1, y_1) \notin D$ şərti ödənilməlidir. (x_1, y_1) nöqtələrinin axtarıldığı oblastı daha dəqiqləşdirək. Fərz edək ki,

$$x_{\max} = \max\{x | (x, y) \in D\},$$
$$x_{\min} = \min\{x | (x, y) \in D\},$$
$$y_{\max} = \max\{y | (x, y) \in D\},$$
$$y_{\min} = \min\{y | (x, y) \in D\},$$

Təpə nöqtələri (x_{min}, y_{min}), (x_{max}, y_{min}), (x_{max}, y_{max}) və (x_{min}, y_{max}) olan düzbucaqlını Q ilə işarə edək (şək. 3).



***Şəkil* 3.** D oblastını özündə saxlayan Q düzbucaqlısı

Aydındır ki, $D \subset Q$. Sektorların (x_i, y_i) mərkəz nöqtələrini Q/D oblastında axtarmaq daha məqsədəuyğundur.

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = (z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n})$$

ilə işarə etsək (2)-nin maksimumunun tapılmasını

$$F(t_1, t_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n} \to \min \quad (3)$$

məsələsinə gətirə bilərik. $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$, $K = \prod_{i=1}^{m} D = D \times D \times \ldots \times D$ işarə etsək, onda $F(z)$ çoxdəyişənli funksiyasının K oblastından maksimumunun tapılması məsələsinə gətiririk.

$$F(z) \to \min, \quad Z \in K \quad (4)$$

(4) şərti optimizasiya məsələsini həll etmək üçün cərimə funksiyası metodundan istifadə edək. Cərimə funksiyası kimi aşağıdakını götürək.

$$\varphi(z) = \begin{Bmatrix} 0 & Z \in K \\ m(|z|^2 + 1)^2 & Z \notin K \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Bu funksiyaları istifadə etməklə (1) optimizasiya məsələsinin əvəzinə

$$f_m^{(t)} F(z) + \varphi_k(z) \to \min \quad (6)$$

şərtsiz optimizasiya məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, (4) şərti optimizasiya məsələsinin həlli, yəni $F(z)$ funksiyasının K çoxluğunda minumumu Z^0, (6)-nın isə Z_0^m nöqtəsidir. Onda asanlıqla göstərmək olar ki,

$$\lim_{m \to \infty} Z_0^m = Z_0 \quad (7)$$

ödənilir. Daha döğrusu, elə böyük m ədədi tapmaq olar ki, $Z_0^m = Z_0$ olsun. Deməli, (4) şərti optimizasiya məsələsini həll etmək üçün (6) şərtsiz optimizasiya məsələsinin həllini m -in böyük qiymətlərində tapmaq kifayətdir, (6) şərtsiz optimizasiya məsələsinin həlli qradiyent üsulu ilə

$$Z^{k+1} = Z^k - t.\ \nabla f_m(Z^k) \qquad (8)$$

ardıcıl yaxınlaşması ilə tapmaq olar ki, burada da

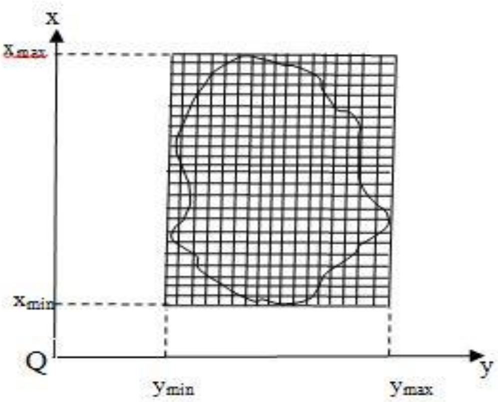
$$\nabla f_m(Z) = \left(\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_1}, \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_{2n}} \right) = qradf_m(z) \qquad (9)$$

kimi təyin olunur. Burada, $f_m(z)$ müəyyən şərtləri ödəyirsə, (8)-lə müəyyən edilən iterasiya ilə tapılan Z^k ardıcıllığı yığılan ardıcıllıq olacaqdır. Yəni $Z^k \to f_h$.

Oblastın diskretləşdirilməsi və diskret optimallaşdırma məsələsinin həlli

Əvvəlki bənddə biz məsələni kəsilməz halda həll etməyə çalışırdıq. Orada biz məsələni (6) şərtsiz optimallaşdırma məsələsinə gətirmişdik. Bu məsələnin həlli üçün müxtəlif üsullar mövcud olsa da, onun həllinin tapılması hər zaman mümkün olmaya bilər. $f_m(z)$ funksiyası lazımi şərtlərinin yoxlanılması çətin məsələlərdən biridir. Bu səbəbdən də, başqa alternativ yollar axtarmaq lazım gəlir. Bu üsullardan biri də diskretləşdirmə üsuludur.

Bu üsuldan istifadə etmək üçün şəkil 3-də verilmiş Q düzbucaqlısını aşağıdakı qaydada şəbəkələrə bölək (şək. 4).



Şəkil 4. D oblastının və Q düzbucaqlısının diskretləşdirilməsi

Tutaq ki, n_x və n_y hər hansı natural ədəddir. $h_x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{n_x}$, $h_y = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{n_y}$ işarə edək. Onda şəbəkənin düyün nöqtələrini aşağıdakı şəkildə təyin edə bilərik:

$$x_i = x_{\min} + ih_x,\ i = 0, n_x$$
$$y_i = y_{\min} + jh_y,\ j = 0, n_y \qquad (10)$$

Asanlıqla görmək olar ki, $x_0 = x_{\min}$, $x_{h_x} = x_{\max}$ və $y_0 = y_{\min}$, $y_{h_y} = y_{\max}$.

$z_{ij} = (x_i, y_i)$ kimi işarə edək. Onda $z_{ij}\ (i = 0, h_x,\ j = 0, h_y)$ nöqtələri Q düzbucaqlısını approksimasiya edən şəbəkənin düyün nöqtəsi olacaqdır. Yəni $z_{ij} \in Q$. Aydındır ki, $z_{ij} \in D$ və ya $z_{ij} \notin D$ ola bilər. Tutaq ki,

$$Q^* = \{ z_{ij} \mid z_{ij} \in Q \}, \quad D^* = \{ z_{ij} \mid z_{ij} \in D \} \qquad (11)$$

düyün nöqtələri çoxluğudur. [7] Asanlıqla görmək olar ki, $D^* \subset Q^*$.

(1) funksionalını diskretləşdirilməsi üçün əvvəlcə $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektorlarını approksimasiya edək. Tutaq ki, P_i^* çoxluğu

$$P_i^* = \{ z_{ij} \mid z_{ij} = (x_i, y_i) \in P(O_i, r_i, \alpha) \} \qquad (12)$$

düsturu ilə təyin edilir. $N(A)$ ilə A sonlu çoxluğunda elementlərin sayını qeyd edək. Onda $N(P_i^* \setminus D^*)$ ifadəsi $P(O_i, r_i, \alpha)$ sektoruna daxil olub, D oblastına daxil olan z_{ij} düyün nöqtələrinin sayını ifadə edəcəkdir. Onları bütün i-lər üzrə cəmləsək, (1) ifadəsinin diskret variantını almış oluruq.

$$J \approx \overline{J} = \sum_{i=1}^{n} N(P_i^* \setminus D^*) \to \min \qquad (13)$$

Beləliklə, məsələ elə

$$z_{ij} = (x_i, y_i) \in Q^* \setminus D^* \qquad (14)$$

nöqtələrinin tapılmasına gətirilir ki, bu halda (13) funksionalı minumum qiymət alsın. Bu isə diskret optimizasiya məsələsidir ki, onun da həlli üçün müxtəlif üsullar mövcuddur. [8, 9]

(13), (14) diskret optimizasiya məsələsi ümumiyyətlə qeyri-xətli diskret optimallaşdırma məsələsidir.

Belə diskret optimallaşdırma məsələlərinin həllini tapmaq üçün dinamik proqlamlaşdırma, variantların ardıcıl təhlili metodu, budaqlar və sərhədlər üsulu, evristik və təqribi metodlar, ardıcıl planlar metodu, simpleks-metod, kəsilmələr metodu, Qamori alqoritmi və s. kimi metodlar işlənmişdir [10]. Bu metodlardan istifadə etməklə biz (13), (14) diskret optimallaşdırma məsələsinin həllini tapa bilərik ki, bu həll də n_x və n_y bölgələrinin artan qiymətlərində (4) optimallaşdırma məsələsinin həllinə yaxınlaşacaqdır ki, bu da D oblastını örtən optimal örtüyü təmin edəcəkdir.

ƏDƏBİYYAT

1. *Heppes A.* Covering a planar domain with sets of small diameter, Periodica Mathematica Hungarica // 2006, vol. 53, pp. 157–168
https://doi.org/10.1007/s10998-006-0029-9
2. *Toth G. F.* Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles // Combinatorial and Computational Geometry, 2005, vol. 52, pp. 361–376
3. *Тахонов И. И.* О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций // 2014, т.21, вып.1,с. 84–102
https://www.mathnet.ru/links/c7c1e8b91d99204405c62412a2154189/da762.pdf
4. *Лебедев П.Д.* Итерационные методы построения аппроксимаций оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств // Челябинский физико-математический журнал. 2019, т.4, вып.1, с. 5–17
5. *Казаков, А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.* К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика, 2013, вып. 6, с. 87–100
6. *Брусов, В.С., Пиявский С.А.* Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971, т. 11, № 2, с. 304–312
7. *Məmmədov Y.C.* Təqribi hesablama üsulları / Bakı: «Bakı Universiteti» nəşriyyatı, 2008, 288 səh.
8. *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование / М.: Наука, 1969, 368 с.
9. *Мамедов К.Ш.* Методы решения различных классов задач дискретной оптимизации / Баку, Елм, 2011, 343 с.
10. *Тюхтина А.А.* Методы дискретной оптимизации / Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014, 62 с.

[1]Milli Müdafiə Universiteti
[2]Memarlıq və İnşaat Universiteti
meherremovroman84@mail.ru hasimovel@gmail.com

OPTİMİSATİON ALGORİTHM OF TRANSFER OF LİMİTED AREA WİTH BASİC ELEMENT'S ON THE FLATNESS

R.R. Maharramov, E.Q. Hasımov, S.R. Kalbiyeva

The article deals with the issue of covering a given limited area on a plane with simple figures. Circle sectors whose centers are outside the limited area are taken as simple figures. It is required to choose the center points of circle sectors with different radii in such a way that these sectors completely cover the limited area and the ratio of the sum of the areas of these sectors to the area of the limited area is minimal.

Keywords: *optimal coverage, covering the area with simple figures, discretization of the domain*

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕНОСА ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Р.Р. Магеррамов, Э.Г. Гашимов, С.Р. Калбиева

В статье рассматривается вопрос покрытия на плоскости заданной ограниченной области простыми фигурами. За простые фигуры принимаются сектора кругов, центры которых находятся за пределами ограниченной области. В качестве центральных точек требуется выбрать круговые сектора с разными радиусами так, чтобы эти сектора полностью покрывали ограниченную площадь и отношение суммы площадей этих секторов к площади ограниченной области было минимальным.

Ключевые слова: *оптимальное покрытие, покрытие площади простыми фигурами, дискретизация площади*