

УДК 517.977

Информатика

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Г.А. Гусейнзаде¹, К.Б.Мансимов²

(Представлено академиком НАН Азербайджана Т.А.Алиевым)

Рассматривается одна дискретно-непрерывная задача оптимального управления [1-3]. При предположении открытости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: дискретно-непрерывная задача оптимального управления, необходимое условие оптимальности, область управления, аналог уравнения Эйлера, условие оптимальности второго порядка

1. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(x(N, t_1)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(k, t) \in U \subset R^r, \quad (k, t) \in D = \{(k, t): 1 \leq k \leq N, t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad (2)$$

$$\dot{x}(k, t) = f(k, t, x(k, t), u(k, t)) + A(k, t)x(k-1, t), \quad (k, t) \in D, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x(0, t) &= g(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(k, t_0) &= h(k), \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь по определению $\dot{x}(k, t) = \frac{d}{dt}x(k, t)$,

$\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, k – натуральное число, $A(k, t)$ – заданная дискретная по k и непрерывная по t ($n \times n$) матричная функция, $f(k, t, x, u)$ – заданная n -мерная вектор функция дискретная по k и при каждом k непрерывная в $T \times R^n \times R^r$ вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, N – заданное натуральное число, $h(k)$ – заданная дискретная функция, $g(t)$ – заданная непрерывная

начальная вектор-функция, U – заданное непустое, ограниченное и открытое множество, $u(k, t)$ – r -мерный кусочно-непрерывный по t и дискретный по k вектор управляющих воздействий.

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Допустимый процесс $(u(k, t), x(k, t))$, доставляющий минимум функционалу (1) при ограничениях (2)-(4), назовем оптимальным процессом.

2. Считая $(u(k, t), x(k, t))$ фиксированным допустимым процессом, введем обозначение

$$H(k, t, x, u, \psi) = \psi' f(k, t, x, u).$$

Здесь $\psi = \psi(k, t)$ – n -мерный вектор сопряженных переменных, являющийся решением сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(k, t) &= -H_x(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) - \\ &- A'(k+1, t)\psi(k+1, t), \quad 1 \leq k \leq N-1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(N, t) &= -H_x(N, t, x(N, t), u(N, t), \psi(N, t)), \\ \psi(N, t_1) &= -\varphi_x(x(N, t_1)), \quad \psi(k, t_1) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу открытости области управления, специальное приращение допустимого управления можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(k, t) = \varepsilon \delta u(k, t), \quad (k, t) \in D. \quad (7)$$

Здесь ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(k, t) \in R^r$, $(k, t) \in D$ – произвольная, ограниченная кусочно-непрерывная по t при каждом k вектор-функция (вариация управления $u(k, t)$).

Через $\Delta x_\varepsilon(k, t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(k, t)$ отвечающее приращению (7) управления $u(k, t)$.

Имеет место

Лемма. Для специального приращения $\Delta x_\varepsilon(k, t)$ траектории $x(k, t)$ имеет место разложение

$$\Delta x_\varepsilon(k, t) = \varepsilon \delta x(k, t) + o(k, t; \varepsilon). \quad (8)$$

Здесь $\delta x(k, t)$ вариация траектории, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(k, t) = & f_x(k, t, x(k, t), u(k, t)) \delta x(k, t) + \\ & + A(k, t) \delta x(k-1, t) + \\ & + f_u(k, t, x(k, t), u(k, t)) \delta u(k, t), \end{aligned} \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \delta x(k, t_0) &= 0, \quad 1 \leq k \leq N, \\ \delta x(0, t) &= 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем по определению $\delta \dot{x}(k, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \delta x(k, t)$.

Решение краевой задачи (9)-(10) допускает представление

$$\delta x(k, t) = \sum_{s=1}^k \int_{t_0}^t F(k, t, s, \tau) f_u(s, \tau, x(s, \tau), u(s, \tau)) \delta u(s, \tau) d\tau, \quad (11)$$

где $F(k, t, s, \tau)$ – $(n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением системы

$$\begin{aligned} F_\tau(k, t, s, \tau) &= -F(k, t, s, \tau) f_x(s, \tau, x(s, \tau), u(s, \tau)) - \\ &- F(k, t, s+1, \tau) A(s+1, \tau), \quad 1 \leq s \leq k-1. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F_\tau(k, t, k, \tau) &= -F(k, t, k, \tau) f_x(k, \tau, x(k, \tau), u(k, \tau)), \\ F(k, t, s, t) &= 0, \quad 1 \leq s \leq k-1, \end{aligned} \quad (13)$$

$F(k, t, k, t) = E (E - (n \times n) \text{ единичная матрица})$.

Используя формулу Тейлора, при помощи (7), (8), специальное приращение $S_\varepsilon(u + \varepsilon \delta u) - S(u)$ критерия качества (1) представляется в виде

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = & -\varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} H'_u(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta u(k, t) dt + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta x'(N, t_1) \varphi_{xx}(x(N, t_1)) \delta x(N, t_1) - \right. \\ & - \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} [\delta x'(k, t) H_{xx}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta x(k, t) + \\ & + 2 \delta u'(k, t) H_{ux}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta x(k, t) + \\ & \left. + \delta u'(k, t) H_{uu}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta u(k, t)] dt \right\} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Из разложения (14) сразу следуют неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Приведем их.

Вдоль оптимального процесса $(u(k, t), x(k, t))$ для всех $\delta u(k, t) \in R^r$, $(k, t) \in D$

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} H'_u(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta u(k, t) dt = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \delta x'(N, t_1) \varphi_{xx}(x(N, t_1)) \delta x(N, t_1) - \\ & - \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} [\delta x'(k, t) H_{xx}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta x(k, t) + \\ & + 2 \delta u'(k, t) H_{ux}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta x(k, t)] dt \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из тождества (15) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(k, t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношение

$$H_u(m, \theta, x(m, \theta), u(m, \theta), \psi(m, \theta)) = 0 \quad (17)$$

выполнялось для всех $1 \leq m \leq N$, $\theta \in [t_0, t_1]$.

Соотношение (17) есть аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Каждое допустимое управление $u(k, t)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера, следуя например [4], назовем классической экстремалью.

Для сужения множества классических экстремалей, не являющихся оптимальными, используя неравенство (16) удастся получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

Введем в рассмотрение матричную функцию $M(\alpha, \beta, s, \tau)$ посредством формулы

$$M(\alpha, \beta, s, \tau) = -F'(N, t_1, s, \tau) \varphi_{xx}(x(N, t_1)) F(N, t_1, \alpha, \beta) + \\ + \sum_{k=\max(\alpha, s)}^N \int_{t=\max(\tau, \beta)}^{t_1} F'(k, t, s, \tau) H_{xx}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) F(k, t, \alpha, \beta) dt. \quad (18)$$

С учетом обозначения (18) из неравенства (16) получаем, что

$$\sum_{s=1}^N \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(s, \tau) f_u(s, \tau, z(s, \tau), u(s, \tau)) M(\alpha, \beta, s, \tau) \times \\ \times f_u(\alpha, \beta, z(\alpha, \beta), u(\alpha, \beta)) \delta u(\alpha, \beta) d\tau d\beta + \\ + 2 \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^k \int_{t_0}^t \delta u'(k, t) H_{ux}(k, t, z(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \times \right. \\ \left. \times F(k, t, s, \tau) f_u(s, \tau, x(s, \tau), u(s, \tau)) \delta u(s, \tau) d\tau \right] dt + \\ + \sum_{k=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(k, t) H_{uu}(k, t, x(k, t), u(k, t), \psi(k, t)) \delta u(k, t) dt \leq 0. \quad (19)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (19) выполнялось для всех $\delta u(k, t) \in R^r$, $(k, t) \in D$.

Неравенство (18) является довольно общим необходимым условием оптимальности второго порядка. Из него можно получить более слабые, но относительно легко проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} v'(\tau) f_u(\xi, \tau, z(\xi, \tau), u(\xi, \tau)) M(\xi, \beta, \xi, \tau) f_u(\xi, \beta, z(\xi, \beta), u(\xi, \beta)) v(\beta) d\tau + \\ + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t v'(t) H_{ux}(\xi, t, z(\xi, t), u(\xi, t), \psi(\xi, t)) F(\xi, t, \xi, \tau) f_u(\xi, \tau, z(\xi, \tau), u(\xi, \tau)) \times \\ \times v(\tau) d\tau \left[dt + \int_{t_0}^{t_1} v'(t) H_{uu}(\xi, t, z(\xi, t), u(\xi, t), \psi(\xi, t)) v(t) dt \right] \leq 0$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, $\xi \in \{\overline{1, N}\}$.

Теорема 4. Вдоль оптимального классического процесса $(u(k, t), x(k, t))$ неравенство

$$\sum_{k=1}^N w'(k) H_{uu}(k, \theta, x(k, \theta), u(k, \theta), \psi(k, \theta)) w(k) dt \leq 0$$

выполняется для всех $w(k) \in U$, $k = \overline{1, N}$, $\theta \in [t_0, t_1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Мн.: БГЭУ, 2005, 363 с.
2. Dymkov M., Rogers E., Dymkov S., Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes // SIAM J. Control Optim. 2008, vol. 47, № 1, pp. 396-420.
3. Dymkov S., Dymkov M., Rogers E., Galkowski K. Optimal control of non-stationary differential linear repetitive processes // Integr. equ. oper. theory. 2008, vol. 60, № 1, pp. 201-216.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.

¹Институт систем управления НАН Азербайджана
²Бакинский государственный университет

BİR DİSKRET-KƏSİLMƏZ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA**G.Ə. Hüseynzadə, K.B. Mənsimov**

Məqalədə bir diskret-kəsilməz optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının açıq olması şərti daxilində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: *diskret-kəsilməz optimal idarəetmə məsələsi, optimallıq üçün zəruri şərt, idarə oblastı, Eyler tənliyinin analoqu, ikinci tərtib optimallıq şərtləri*

ON THE ONE DISCRETE-CONTINUOUS OPTIMAL CONTROL PROBLEM**G.A. Huseynzada, K.B. Mansimov**

In the paper considered the one discrete-continuous control problem. First and second order necessary optimality conditions are obtained.

Keywords: *discrete-continuous optimal control problem, a necessary condition for optimality, management area, an analog of the Euler equation, the optimality condition of the second order*