

УДК 531+539.3

Механика

О СОУДАРЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИБКОЙ КОНСТРУКЦИЕЙ

Член-корреспондент НАН Азербайджана М.Ф.Мехтиев¹, Ш.М.Муталлимов²

В статье даются новые граничные условия на волне сильного разрыва гибкой конструкции при ударе по ней твердым телом при сверхзвуковом режиме. Предполагается, что поверхность ударяющего тела и поверхность конструкции в виде нити и мембраны достаточно гладкая. Решены задачи о поперечном ударе клином с передней плоской частью конечной массы по упругой нити, сопровождающемуся обрывом нити.

Ключевые слова: клин, обрыв, гибкий, нить, поперечный удар, сверхзвуковой

В работе [5] решены задачи (без обрыва нити) о нормальном ударе твердым телом с постоянной скоростью по абсолютно гибкой линейно упругой нити при сверхзвуковом режиме движения. Задачи решены в предположении наличия сосредоточенных сил в точках излома нити без учета силы трения. Но при определении величины напряжения σ за точкой излома оно оказалось отрицательным [5], что неприемлемо по физическим соображениям, так как гибкие нити не могут сопротивляться сжатию.

В данной работе устранены вышеуказанные противоречия, дается анализ граничных условий в точке излома абсолютно гибкой конструкции в виде нити и мембраны при ударе по ней твердым телом при сверхзвуковом режиме. Решены задачи о поперечном ударе клином с передней плоской частью конечной массы по упругой нити, сопровождающемуся обрывом нити.

1. Рассмотрим случай, когда материал гибкой конструкции в виде нитей или мембран описывается линейным законом упругости. Принимается, что после удара прогибаемая часть гибкой конструкции облегает поверхность ударяющего тела и точка излома перемещается по гибкой конструкции со «сверхзвуковой» скоростью ($b = V \operatorname{ctg} \gamma > a$). Здесь b - скорость точки излома, V - скорость удара, γ - угол между касательной к образующей поверхности ударяющего тела и начальным направлением конструкции, a -

скорость упругой волны в конструкции.

Соотношения на волне сильного разрыва (в точке излома) при сверхзвуковом режиме имеют вид [5]

$$b = \frac{b \sec \gamma - \vartheta_2}{1 + \varepsilon_2}; \quad \rho b (\vartheta_2 - V \sin \gamma) = -\sigma_2 \quad (1.1)$$

$$\rho b V \cos \gamma = Q. \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) определяется сосредоточенная сила Q .

Здесь индекс 2 относится к величинам за фронтом волны сильного разрыва (за точкой излома), σ_2 - напряжение, ε_2 - деформация, $\vartheta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_2$ - скорость частицы, ρ - плотность материала нити (или мембраны) полагаем постоянной, t - время, u - эйлерова координата частицы, Q - сосредоточенная сила в точках излома конструкции.

В случае нити

$$\sigma_2 = E \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial x} - 1; \quad (1.3)$$

в случае мембраны

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_0); \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial r} - 1; \\ \varepsilon_0 = \frac{u \cos \gamma}{r} - 1. \quad (1.4)$$

Здесь E , ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Уравнения (1.1), (1.3) (или (1.4)) обра-

зуют систему для определения трех величин ε_2 , σ_2 , ϑ_2 и имеют вид [5]

$$\varepsilon_2 = -\frac{(1-\cos\gamma)}{b_0^2-1}b_0^2;$$

$$\vartheta_2 = \frac{(b_0^2)(1-\cos\gamma)+\cos\gamma}{(b_0^2-1)\cos\gamma} \cdot b;$$

$$\sigma_2 = \rho a^2 \varepsilon_2 < 0, \quad (1.5)$$

где $a^2 = \frac{E}{\rho}$ (для нити) или $a^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$

(для мембраны); $b_0 = b \cdot a^{-1}$.

Получилось, что напряжение за точкой излома оказалось отрицательным, что неприемлемо по физическим соображениям, ибо гибкие нити или мембрана не могут сопротивляться сжатию.

Для построения решения на волне сильного разрыва имеющая физический смысл в условиях (1.1) необходима схематизация, учитывающая нулевую сопротивляемость гибкой конструкции сжатию. Такая схематизация на волне сильного разрыва (за точкой излома) очевидно будет

$$\sigma_2 = 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что при этом соотношении упругости (1.3) (или (1.4)) уже неприменимы. Тогда из системы (1.1) и (1.6) получается, что условия на волне сильного разрыва имеют вид:

$$\varepsilon_2 = \cos\gamma - 1 < 0; \quad \vartheta_2 = V \sin\gamma > 0; \quad \sigma_2 = 0. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) следует, что этот режим соответствует процессу соударения, при котором за точкой излома скорость частицы гибкой конструкции положительная, а элементы гибкой конструкции сморщиваются по поверхности ударяющего тела, собираясь в «гармошку», так что его первоначальная длина «сокращается», т.е. $\varepsilon_2 < 0$, но это происходит при нулевых напряжениях (рис. 1).

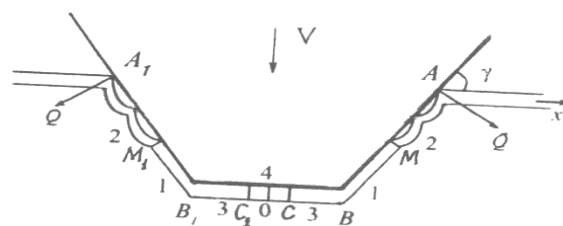


Рис. 1

Отметим, что такая схема движения за фронтом волны сильного разрыва при нормальном ударе по гибкой упругой связи была принята и в работах [1-4] с учетом силы трения, но при условии $\gamma > 2\gamma_*$, где $\mu = \tan\gamma_*$, μ_* - коэффициент кулонова трения в точке излома.

Ниже построим решение задачи об ударе притупленным клином конечной массы по гибкой упругой нити с условиями (1.7) и с учетом возможности разрушения.

2. Рассмотрим задачу о поперечном ударе симметричным клином с передней плоской частью конечной массы по гибкой упругой нити с учетом возможности ее разрушения. Предполагается, что поверхность ударяющего названного клина и поверхность нити достаточно гладкая. Принимается, что после удара прогибаемая часть нити A_1B_1BA облегает поверхность ударяющего клина (рис. 1), а скорость волны сильного разрыва (скорости точки излома A и A_1) больше скорости упругой волны нити. Длину BB_1 обозначим $2L$. При сверхзвуковом режиме ($b = V \tan\gamma > a$) в области A_1B_1BA в нити возникают две упругие волны с фронтами C и C_1 , две волны распрямления с фронтами M и M_1 , две волны сильного разрыва с фронтами A и A_1 (рис. 1). Такая волновая схема происходит до момента времени $t = \frac{L}{a}$ ($0 \leq t < \frac{L}{a}$). Так как ударяющий клин симметричный, то напряженное состояние в области $OCBMA$ и в области $OC_1B_1M_1A_1$ одинаково. В области C_1C (рис. 1) до момента $t = \frac{L}{a}$ нить находится в покое относительно клина.

Уравнение движения линейно упругой нити в областях СВ и ВМ соответственно будет [1, 4]:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dV}{dt} \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Здесь t - время, $W(x, t)$ - смещение сечения нити на поверхности клина; $u(x, t)$, x - эйлеровы и лагранжевы координаты частицы нити.

Уравнения движения записаны в системе координат, связанной с ударяющим клином, поэтому в (2.2) возникла сила инерции $\rho \frac{dV}{dt}$. В данной задаче к уравнению (2.2) нужно присоединить уравнения движения клина.

$$M_0 \frac{dV}{dt} = -2Q \cos \gamma, \quad (2.3)$$

где M_0 - масса ударяющего клина.

Уравнение (2.3) решается с начальным условием

$$V(t) = V_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.4)$$

Для интервала времени $0 \leq t < \frac{L}{a}$ движение упругой нити в области СВА разбивается на три области (рис. 1). Область 3- от фронта упругой волны С до узла клина В; область 1- от узла клина В до фронта волны распрямления $x_*(t)$ ($L \leq x < x_*(t)$); область 2- от фронта распрямления $x_*(t)$ до фронта волны сильно-го разрыва $b(t)$ ($x_*(t) < x \leq b(t)$).

Здесь $x_*(t)$ - граница раздела области со сморщиванием и области, примыкающей к узлу клина, т.е. там, где нить вновь растягивается. Функция $x_*(t)$ подлежит определению в ходе решения задачи.

Отметим, что параметры движения

гибкой нити, возникающие в областях 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. будем снабжать соответствующими индексами. Узлы клина (рис. 1) являются точками стационарных разрывов, а движение нити относительно этих точек принимается как движение через неподвижные блоки, и деформации не терпят разрывов в этих точках. В точке В имеется кинематическое условие

$$\vartheta_3 = \vartheta_1 \cos \gamma; \quad \vartheta_3 = \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_3; \quad \vartheta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_1 \quad (2.5)$$

и условие

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_3 = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_3; \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - 1. \quad (2.6)$$

Из условия непрерывности функции смещения $W(x, t)$ на фронте упругой волны $x = L - a_0 t$ имеем

$$W(x, t) = 0 \quad \text{при } x = L - at. \quad (2.7)$$

На фронте распрямления $x_*(t)$ имеем обычные условия на скачке, т.е. из условия непрерывности смещений и количества движения имеем [1, 4].

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \dot{x}_*(t)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1); \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \rho \dot{x}_*(t)(\vartheta_2 - \vartheta_1). \quad (2.8)$$

Здесь $x - L = x_1$; $x_{1*}(t) = x_*(t) - L$.

Неизвестную функцию $x_{1*}(t)$ представим в виде

$$x_{1*}(t) = \omega t + \omega_1 t^2, \quad (2.9)$$

где ω , ω_1 - неизвестные константы и подлежат определению, $\dot{x}_{1*}(t) = \frac{dx_*(t)}{dt}$ - скорость фронта распрямления; ε_2 , σ_2 , ϑ_2 определяются формулами (1.7).

Вводим безразмерные величины в виде:

$$\bar{V} = \frac{V}{a}; \quad \bar{\vartheta}_i = \frac{\vartheta_i}{a}, \quad (i=1, 2, 3); \quad \bar{t} = \frac{at}{L}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{a};$$

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \frac{L}{a^2}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{u} = \frac{u}{L}; \quad \bar{W} = \frac{W}{L};$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho a^2}; \quad m = \frac{\rho}{M_0} L; \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{a};$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L} = \frac{x}{L} - 1 = \bar{x} - 1. \quad (2.10)$$

Используя безразмерные обозначения (2.10), величины, участвующие в уравнениях и условиях, будут величины с черточками и в дальнейшем во всех соотношениях и тех, что будут из них получаться, черточки над буквами будут опущены. Тогда уравнения (2.1), (2.2), (2.3), (2.9) и условия (1.7), (2.4)-(2.8) соответственно примут вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{dV}{dt} \sin \gamma, \quad (2.12)$$

$$\frac{dV}{dt} = -KmV^2, \quad (2.13)$$

$$x_{1*}(t) = \omega t + \omega_1 t^2, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_2 = \cos \gamma - 1 < 0, \quad (2.15)$$

$$\vartheta_2 = V \sin \gamma > 0, \quad (2.16)$$

$$V(t) = V_0 \text{ при } t = 0, \quad (2.17)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_1 \cos \gamma, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad (\sigma_3 = \sigma_1), \quad (2.18)$$

$$W(x, t) = 0 \text{ при } x = 1 - t, \quad (2.19)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \dot{x}_{1*}(t)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad \sigma_1 = \dot{x}_{1*}(t)(\vartheta_2 - \vartheta_1). \quad (2.20)$$

3. Решение задачи приводится к решению уравнения (2.11)-(2.13) с условиями (2.15)-(2.20).

Решение уравнения движения клина (2.13) с условием (2.17) имеет вид

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + KmV_0 t} \cong V_0(1 - KmV_0 t),$$

$$\left(K = \frac{2 \cos^3 \gamma}{\sin \gamma}, \quad m = \frac{\rho}{M_0} L \right). \quad (3.1)$$

Учитывая (2.13) и (3.1) в уравнении движения нити (2.12), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{V_0^2}{(1 + KmV_0 t)^2} K_1, \quad (K_1 = Km2 \cos^3 \gamma). \quad (3.2)$$

Отметим, что в ударных процессах наибольший интерес представляет начальный момент времени соударения. Поэтому при разложении в ряд функции $(1 + kmV_0 t)^{-2}$, ограничиваясь первыми двумя членами, получим следующее приближенное выражение

$$(1 + KmV_0 t)^{-2} \cong 1 - 2KmV_0 t. \quad (3.3)$$

Тогда уравнение движения (3.2) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - K_1 V_0^2 (1 - 2KmV_0 t). \quad (3.4)$$

Решение уравнения (2.11) и (3.4) соответственно представим в виде

$$W(x_1, t) = C_0(t - x_1) + C_1(t + x_1) + C_2(t - x_1)^2 + C_3(t + x_1)^2, \quad (3.5)$$

$$u(x_1, t) = a_0(t - x_1) + b_0(t + x_1) + a_1(t - x_1)^2 +$$

$$+ b_1(t + x_1)^2 - \frac{K_1 V_0^2}{4}(t^2 - x_1^2)(1 - KmV_0 t). \quad (3.6)$$

Неизвестные константы $C_0, C_1, C_2, C_3, a_0, b_0, a_1, b_1, \omega, \omega_1$ - определяются из условий (2.15)-(2.20) с учетом (2.14), (3.1).

Расчеты показывают, что при $\gamma = 15^\circ$

$$V_0 = 0,54; \quad (b = 2),$$

$$a_1 = 0,031; \quad b_1 = -0,076;$$

$$C_3 = b_1 - a_1 = -0,107, \quad (C_3 < 0);$$

$$\omega_1 = -0,008, \quad \omega = 0,885. \quad (3.7)$$

Из полученных результатов следует, что при одинаковых γ при ударе притупленным клином с постоянной скоростью V_0 по

упругой нити фронт распрямления больше, чем при ударе притупленным клином конечной массы с начальной скоростью V_0 по упругой нити. Следовательно, сморщенная область, возникающая в упругой нити при ударе клином с передней плоской частью конечной массы увеличивается.

Безразмерное напряжение нити σ_1 в узле клина (в точке $x_1 = 0$) с учетом (3.6) выражается в виде

$$\sigma_1 = \frac{\omega g_2^0}{1 + \sec \gamma} + 2(b_1 - a_1)t; \quad (b_1 - a_1 < 0). \quad (3.8)$$

Из формулы (3.8) следует, что напряжение нити по времени t уменьшается. Следовательно, напряжение, возникающее при начальном моменте соударения (при $t = 0$) больше, чем напряжение (3.8) и оно равно

$$\sigma_1^0 = \frac{\omega g_2^0}{1 + \sec \gamma}, \quad (g_2^0 = V_0 \sin \gamma). \quad (3.9)$$

В узлах В и В₁ (рис. 1) ударяющего названного клина нить налево и направо (по условию (2.18)) растягивается с одинаковым напряжением (3.9), и в этих точках напряжение удваивается и равно

$$\sigma = 2\sigma_1^0 = 2 \frac{g_2^0 \omega}{1 + \sec \gamma}. \quad (3.10)$$

Фронты упругих волн С и С₁ (рис. 1) при $t = \frac{L}{a}$ ($t = 1$) встречаются в неподвижной точке О и в момент встречи (в точке О) скорость частицы нити обращается в нуль, а в этом месте напряжение (деформация) удваивается и выражается в виде

$$\sigma_2^{(0)} = 2 \frac{g_2^0 \omega}{1 + \sec \gamma}. \quad (3.11)$$

Теперь рассмотрим процесс построения решения задачи, сопровождающийся обрывом нити. Для этого нужно определить $\max \sigma$ в полученном выше решении и приравнять эту величину к разрушающему напряжению σ_{np} . Здесь σ_{np} - прочность на разрыв материала нити.

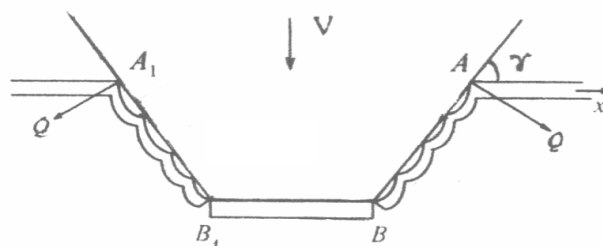


Рис. 2

Из полученных решений (3.10), (3.11) следует, что $\max \sigma$ в нити возникает в узлах клина В и В₁ и в точке симметрии $x = 0$. Однако, до прихода фронта упругих волн в точку «О» (при $t = \frac{L}{a}$) в узлах В и В₁ уда-

ряющего названного клина при $t < \frac{L}{a}$ возникает максимальное напряжение в виде (3.10). Поэтому в предельное условие должно быть подставлено в качестве $\max \sigma$ именно это напряжение (3.10), и это условие примет вид

$$\frac{2 \cdot g_2^{(0)} \omega}{1 + \sec \gamma} = \sigma_{np}. \quad (3.12)$$

Таким образом, в плоскости (γ, M) , $\left(M = \frac{V}{a}\right)$ предельное условие (3.12) представляет собой некоторую кривую, расположенную выше линии $M = \tan \gamma$. Здесь $M = \tan \gamma$ является границей раздела области сверхзвукового режима от области дозвукового режима в плоскости (γ, M) . В области выше линии (3.12) движение упругой нити будет сопровождаться разрушением нити в узлах клина (рис. 2).

Решение с обрывом имеет следующую схему: после обрыва в области В₁В нить полностью разгружена и движется вместе с ударяющим клином, а в области ВА и В₁А₁ нить сморщена и формулы (1.7) верны всюду в области ВА и В₁А₁ (рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С., Муталлимов Ш.М. О динамике соударения твердого тела с гибкой нитью и мембраной // Прикладная математика и механика, 1985, 49, №1, с. 85-93.
2. Мехтиева М.Ф., Муталлимов Ш.М., Мамедов Э.А. Об одной модели разрушения гибкой мембраны при ударе конусом // Доклады НАН Азербайджана, 2008, LXIV, №2, с. 29-34.

3. Муталлимов К.Ш. Об обрыве упругой нити при поперечном ударе клином // Прикладная механика, 1997, 33, №7, с. 79-83.
4. Муталлимов Ш.М. Волновая динамика гибких связей. – Б.: Элм, 2001, 267 с.
5. Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Физмашгиз, 1961, 399 с.

¹Институт математики и механики НАНА

²Азербайджанский технологический университет

BƏRK CİSMİN ÇEVİK KONSTRUKSIYA İLƏ TOQQUŞMASI HAQQINDA

M.F.Mehdiyev, Ş.M.Mütəllibov

Məqalədə səs sürətindən böyük hərəkət rejimi halında səthləri kifayət qədər hamar olan bərk cisimlə çevik konstruksiyaların toqquşmasında, konstruksiyalarda yaranan kəskin dalğa cəbhəsində yeni sərhəd şərtləri verilir. Alınmış şərtlərlə sonu kütləli, ön tərəfi müstəvi şəkildə olan simmetrik pazla çevik xətti elastik sapa normal zərbə və sapın qırılması məsələsi analitik həll olunur.

Açar sözlər: paz, qırıq, sap, səsən sürətli, elastik, eninə zərbə

ABOUT PERCUSSION OF THE FIRM BODY WITH THE FLEXIBLE DESIGN

M.F.Mekhtiev, Sh.M.Mutallimov

In article new boundary conditions on a wave of strong rupture of a flexible design are given at blow on it by a firm body at a supersonic mode. It is supposed, that a surface of a striking body and a surface of a design in the form of a thread and a membrane smooth enough. About cross-section blow by a wedge problems are solved with a forward flat part of final weight on the elastic thread, accompanied by thread breakage.

Keywords: wedge, break, flexible, filament, cross-section impact, supersonic