

УДК 532.3

Механика

О ВЫНУЖДЕННОМ КОЛЕБАНИИ ГИДРОЭЛАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ СТЕНЫ

Член-корреспондент НАН Азербайджана С.Д. Акбаров, М.И. Исмаилов

В работе путем исследования вынужденных колебаний гидроэластичной системы, состоящей из металлической пластины с начальными напряжениями, сжимаемой вязкой жидкости и абсолютно жесткой стены, изучается скорость течения жидкости через механические колебания пластины и влияния на эти скорости глубины слоя жидкости.

Движение пластины описывается линеаризованными уравнениями движения упругих тел, а течение сжимаемой жидкости линеаризованными уравнениями Навье-Стокса. Принимается, что на свободную поверхность пластины действует гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила.

Показана необходимость проведения дальнейших исследований по результатам полученных численных решений

Ключевые слова: *металлическая пластина, сжимаемая вязкая жидкость, вынужденные колебания, начальные напряжения*

Обзор исследований, относящихся к динамике гидроупругой системы, состоящей из преднапряженной пластины и сжимаемой вязкой жидкости, приведен в работах [1, 2]. Однако, до недавнего времени не было никаких исследований, относящихся к изучению вынужденных колебаний этой системы.

Первая попытка в этом направлении была сделана в работе [3]. При этом рассмотрено вынужденное колебание бесконечной упругой пластины с начальными натяжениями, которая покрывает полуплоскость заполненной сжимаемой вязкой жидкостью.

Следует отметить, что одним из основных параметров гидроупругой системы состоящей из пластин и жидкости, является глубина жидкости, в которую загружают пластины. Теоретическое исследование о влиянии указанного параметра на механическое поведение отмеченной гидроупругой системы имеет не только теоретическую, а также практическую значимость. В резуль-

тате таких исследований, например, можно определить диапазон изменений параметров гидроупругой системы, при котором необходимо принимать во внимание вязкость или сжимаемость жидкости, контактирующей с пластиной. Кроме того, в результате этих исследований можем иметь достоверную информацию об управлении течения жидкости через механические колебания пластины, контактирующей непосредственно с жидкостью, и какое влияние окажет к этому течению глубина слоя жидкости. Эти и многие другие теоретические и практические важные вопросы вызывают необходимость для исследования задачи динамики, в частности, вынужденные колебания гидроупругой системы, составленной из упругой пластины с начальными напряжениями, из полосы заполненной сжимаемой вязкой жидкости и из абсолютно жесткой стены. Именно этому вопросу посвящена настоящая работа.

Постановка задачи. Основные уравнения и соотношения

Рассмотрим систему, состоящую из начально-натянутой пластины, полосы, заполненной сжимаемой вязкой жидкостью, и абсолютно жесткой стены (рис.1).

С пластиной свяжем декартовые системы координат $Ox_1x_2x_3$, и положение точек рассматриваемой системы, определим с Лагранжевыми координатами в этой системе координат. Ниже, величины, относящиеся к начальному состоянию в пластине, отметим с верхним индексом 0. Примем, что начальное напряжение в пластине определяется в рамках классической линейной теории упругости и выражается в виде $\sigma_{11}^0 = \text{const}$, $\sigma_{ij}^0 = 0$, если $ij \neq 11$. Итак, в рамках этих предположений рассмотрим движения пластины в случае, когда на свободной лицевой плоскости пластин действуют линейно-точечные, гармонически по времени, усилия. Исследования проведем с привлечением линеаризованной теории волн и примем, что пластина занимает область $\{|x_1| < \infty, -h < x_2 < 0\}$, а жидкость - область $\{|x_1| < \infty, -h_\alpha < x_2 < -h\}$. Упругие соотношения для материала пластин описываем через потенциал Мурнагана. Таким образом, согласно [4], запишем следующие уравнения движения и упругие соотношения для пластин.

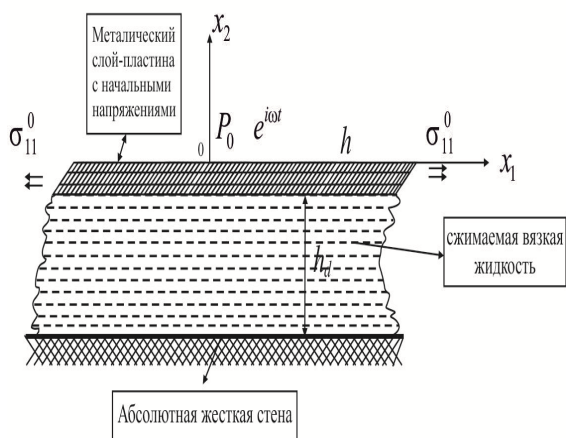


Рис.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \sigma_{11} &= \omega_{1111} \varepsilon_{11} + \omega_{1122} \varepsilon_{22}; \\ \sigma_{22} &= \omega_{2211} \varepsilon_{11} + \omega_{2222} \varepsilon_{22}; \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\omega_{1212} \varepsilon_{12} \\ \omega_{\nu j \alpha \beta} &= \omega_{\nu j \alpha \beta}(\lambda, \mu, a, b, c, \sigma_{11}^0) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Отметим, что в уравнение (1) через a, b и c обозначены упругие постоянные третьего порядка, которые входят в выражения упругого потенциала Мурнагана. Открытие выражения для $\omega_{\nu j \alpha \beta}$ приведены в [4]. Остальные же обозначения, использованные в (1) являются общепринятыми.

Теперь, согласно [2], запишем линеаризованные уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности, реологические соотношения и уравнения состояния для сжимаемой вязкой жидкости.

$$\begin{aligned} \rho_0^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \mu^{(1)} \Delta v_i + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \rho_0^{(1)} \theta &= 0, \\ T_{ij} &= (-p^{(1)} + \lambda^{(1)} \theta) \delta_{ij} + 2\mu^{(1)} e_{ij}, \\ \theta &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \\ a_0^2 &= \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \rho^{(1)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $i, j = 1, 2$, $\rho_0^{(1)}$ - плотность жидкости до колебания пластины, $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$ - возмущения плотности и давления, $\mu^{(1)}$ - коэффициент вязкости, $\lambda^{(1)}$ - второй коэффициент вязкости.

Принимаем $\lambda^{(1)} = -\frac{2}{3} \mu^{(1)}$ и выполняем нижеприведенные граничные и контактные условия

$$\begin{aligned}
\sigma_{21}|_{x_2=0} &= 0, \\
\sigma_{22}|_{x_2=0} &= -P_0 e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{x_2=-h} = v_1|_{x_2=-h}, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t}|_{x_2=-h} &= v_2|_{x_2=-h}, \\
\sigma_{21}|_{x_2=-h} &= \tau_{21}|_{x_2=-h}, \\
\sigma_{22}|_{x_2=-h} &= \tau_{22}|_{x_2=-h}, \\
v_1|_{x_2=-h-h_d} &= 0, \quad v_2|_{x_2=-h-h_d} = 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

С изложенным выше исчерпывается постановка задачи.

Метод решения

Для решения сформулированной выше задачи искомые величины представляем в виде $g(x_1, x_2, t) = \bar{g}(x_1, x_2) e^{i\omega t}$ и подставляя это выражение в уравнение и соотношение, и записывая $i\omega(\bullet)$ и $-\omega^2(\bullet)$ вместо $\partial(\bullet)/\partial t$ и $\partial^2(\bullet)/\partial t^2$, соответственно, получаем граничные и контактные условия, для амплитуд искомых величин. Для решения же последних, применяем экспоненциальное преобразование Фурье относительно координаты x_1 :

$$f_F(s, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-isx_1} dx_1 \quad (4)$$

При этом, из (1) получаем уравнение для преобразования Фурье перемещений пластин u_{1F} и u_{2F} . Решая соответствующие системы дифференциальных уравнений определяем выражение для u_{1F} и u_{2F} и напряжений, которые содержат неизвестные постоянные.

Применяя преобразования (4) к уравнениям движения жидкости (2) и используя представления для общих решений этих

уравнений [2], определяем выражения для скоростей v_{1F}, v_{2F} и напряжений T_{vj} , относящиеся к жидкости и содержащие неизвестные постоянные. Указанные неизвестные постоянные определяем из условий (3) и после этого используем выражение:

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{22}, \sigma_{11}, u_2, T_{22}, T_{11}, v_2\} &= \\
&= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty [\sigma_{22F}, \sigma_{11F}, \right. \\
&\quad \left. u_{2F}, T_{22F}, T_{11F}, v_{2F}] e^{i\omega t} \cos(sx_1) ds \right\} \\
\{\sigma_{21}, u_1, T_{21}, v_1\} &= \\
&= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty [\sigma_{21F}, u_{1F}, T_{21F}, v_{1F}] e^{i\omega t} \cdot \sin(sx_1) ds \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

определяем оригиналы этих величин.

Численные результаты и их обсуждения

Предположим, что материал пластины состоит из стали с механическими свойствами $\mu = 79 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\lambda = 94.4 \times 10^9 \text{ Pa}$, $a = -235 \times 10^9 \text{ Pa}$, $b = -275 \times 10^9 \text{ Pa}$, $c = -490 \times 10^9 \text{ Pa}$ и плотностью $\rho = 1160 \text{ kg/m}^3$ [4]. А для материала жидкости возьмем глицерин с коэффициентом вязкости $\mu^{(1)} = 1.393 \text{ kg/(ms)}$, с плотностью $\rho_0^{(1)} = 1260 \text{ kg/m}^3$ и со скоростью звука $a_0 = 1459.5 \text{ m/s}$ [2]. Введем также обозначения $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, которые означают скорость поперечных волн в материалах пластин.

Введем безразмерный параметр h_α/h , через который можем определить влияние глубины жидкости на значение искомых величин.

Рассмотрим некоторые численные результаты, относящиеся, скорости v_2 и напряжению T_{22} , вычисленные на плоскости $x_2 = -h$, т.е. на межфазной плоскости между пластиной и жидкостью. При этом примем, что $\sigma_{11}^0 = 0$, т.е. начальное напряжение в пластине отсутствует и исследуем влияние отношения h_d/h на зависимости

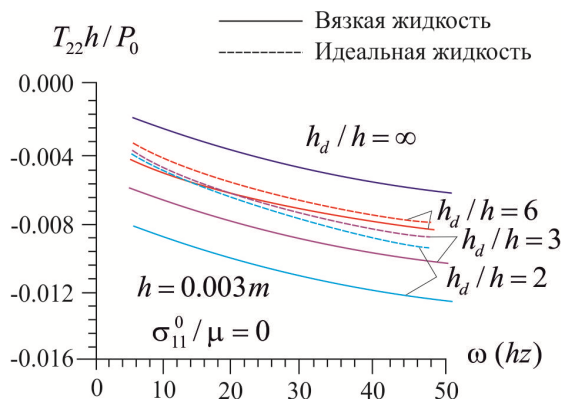


Рис. 2

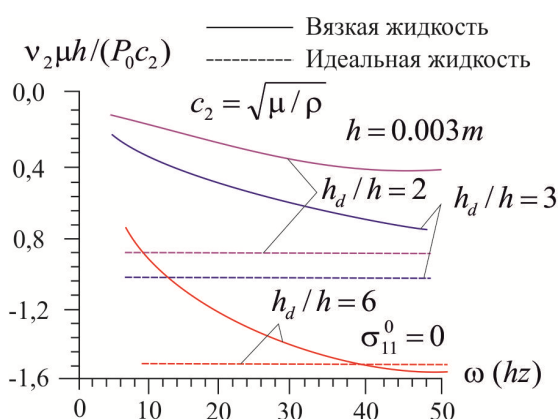


Рис. 3

между v_2 и ω , и между T_{22} и ω . Для этой цели рассмотрим графики, приведенные на рис.2 и на рис.3.

Отметим, что при построении этих графиков величины v_2 и T_{22} вычислены в точке $x_1/h = 0$ и предполагалось, что $h = 0,003m$. Кроме того, отметим, что на рис.2 и на рис.3 приведены результаты, относящиеся не только к случаю, когда глицерин моделируется как вязкая Ньютоновская сжимаемая жидкость, а также к случаю, когда глицерин моделируется как идеальная сжимаемая жидкость. Таким образом, исходя из сравнений этих результатов можем определить влияния вязкости глицерина на значение изучаемых величин.

Вкратце проанализируем результаты, приведенные на рис.2 и на рис.3. Во-первых, из этих графиков следует, что абсолютные

значения $v_2\mu h/(P_0c_2)$ уменьшаются с ростом h_d/h . При этом, в каждом выбранном значении h_d/h в рассматриваемом диапазоне изменения частоты ω , т.е. при $5hz \leq \omega \leq 50hz$, абсолютные значения скорости v_2 и напряжения T_{22} увеличиваются с увеличением частоты ω . Отметим, что эти заключения хорошо согласуются с известными механическими соображениями, и эта согласованность подтверждает правомочность алгоритма и программ, используемых при получении этих численных результатов.

Теперь, анализируем влияние вязкости жидкости на значение изучаемых величин. Исходя из графиков, приведенных на рис.2 и на рис.3, можем заключить, что влияние вязкости жидкости на значение v_2 и T_{22} увеличивается с уменьшением h_d/h и с уменьшением ω . Однако, с ростом h_d/h и ω величины указанного влияния затухают.

Таким образом, из приведенных результатов следует, что глубина слоя жидкости, т.е. значения h_d/h , может оказать существенное влияние на вынужденное колебание рассматриваемой гидроупругой системы. Следовательно, продолжение соответствующих теоретических исследований в этом направлении является необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in prestressed bodies interacting with fluid (Survey)// Int. Appl. Mech. 33 (6), 1997, с. 435-465.
2. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid// Cambridge Scientific Publishers, 2009.
3. Akbarov S.D. Frequency response of a pre-stressed elastic metal plate under compressible viscous fluid loading// In "Non-Newtonian systems in the oil and gas industry" proc. of the International Scientific Conference devoted to the 85-th anniversary of academician Azad Khalil oglu Mirzajanzadeh, Baku, 21-22 November, 2013. pp. 46-48.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями «А.С.К.», Киев, 2004.

Институт математики и механики
НАН Азербайджана

**BAŞLANĞIC GƏRGİNLİYİ OLAN METAL LÖVHƏ, SIXILABİLƏN ÖZLÜ MAYE VƏ
MÜTLƏQ SƏRT DİVARDAN İBARƏT OLAN HİDROELASTİK SİSTEMİN
MƏCBURİ RƏQSLƏRİ HAQQINDA**

S.C. Əkbərov, M.İ. İsmayılov

Məqalədə, başlanğıc gərginliyi olan lövhə sıxılabilən özlü maye zolaq və mütləq sərt divardan ibarət olan hidroelastik sistemin məcburi rəqsləri tədqiq edilərək özlü maye zolağın qalınlığının maye və lövhə arasındakı müstəvi üzərində mayenin hərəkət sürəti və gərginliyinə təsiri öyrənilir. Lövhənin hərəkəti qeyri-xətti elastodinamiyin xəttiləşdirilmiş tənlikləri, sıxılabilən mayenin hərəkəti isə xəttiləşdirilmiş Haviye-Stoks tənlikləri ilə yazılır. Lövhənin sərbəst üzünə zamana görə harmonik dəyişən xətti yayılı topa qüvvənin təsir etdiyi qəbul edilir. Əldə edilən ədədi nəticələrə uyğun tədqiqatların davam etdirilməsinin çox zəruri olduğunu göstərir.

Açar sözlər: metal lövhə, sıxılabilən özlü maye, məcburi rəqs, başlanğıc gərginlik

**ON FORCED OSCILLATIONS OF A HYDROELASTIC SYSTEM CONSISTING OF A
METALLIC PLATE WITH INITIAL STRESSES, COMPRESSIBLE
VISCOUS FLUID AND ABSOLUTELY RIGIDWALL**

S.D. Akbarov, M.I. Ismailov

In the paper, the forced oscillations of a hydroelastic system consisting of a metallic plate with initial stresses, compressible viscous fluid and absolutely rigid wall are investigated. The influence of the fluid depth on the velocity and stress acting on the fluid-plate interface is studied.

The plates motion is described by the linearized equations of nonlinear elastodynamics, the motion of compressible fluid by the linearized Navier-Stokes equations. It is accepted that the harmonically time varying concentrated force act on free surface of the plate. It is assumed that further investigations on the results of the obtained numerical solutions is necessary.

Keywords: metallic plate, compressible viscous fluid, forced oscillations, initial stress