

УДК 517.51

Математика

О ПОРЯДКОВОЙ ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВ ТИПА МАРШО В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(T^m)$

Н.А. Ильясов

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.Д. Гаджиевым)

Установлена порядковая точность на заданном классе неравенств типа Маршо для полных модулей гладкости функций и их производных в пространствах $L_p(T^m)$.

Ключевые слова: полный модуль гладкости, полное наилучшее приближение, неравенства типа Маршо, точность в смысле порядка на классе

В заметке используются следующие обозначения: R^m – m -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 1$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, $T^m = [-\pi, \pi]^m$ – m -мерный куб периодов; $L_p(T^m)$, $1 \leq p < \infty$, – пространство всех измеримых 2π -периодических по каждой переменной функций $f: R^m \rightarrow R$, для которых $L_p(T^m)$ -норма $\|f\|_{p,m} \equiv \{(2\pi)^{-m} \int_{T^m} |f(x)|^p dx\}^{1/p}$ конечна, $L_\infty(T^m) \equiv C(T^m)$ – соответствующее пространство непрерывных функций с равномерной нормой $\|f\|_{\infty,m} = \max\{|f(x)|: x \in T^m\}$; $W_p^r(T^m)$, $r \in N$, $1 \leq p \leq \infty$, – совокупность всех функций $f \in L_p(T^m)$, имеющих почти всюду производные $D^\alpha f(x) \in L_p(T^m)$ при $0 < |\alpha| \leq r$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in Z_+$ ($i = \overline{1, m}$), $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $D^\alpha f(x) = \partial^{|\alpha|} f(x) / \partial x^\alpha$ ($D^0 f(x) \equiv f(x)$); $\omega_l(f; \delta)_{p,m}$ – полный модуль гладкости l -го порядка функции $f \in L_p(T^m)$:
 $\omega_l(f; \delta)_{p,m} = \sup \{ \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_{p,m} : h \in R^m, |h| \leq \delta \}$,
 $l \in N$, $\delta \in [0, \infty)$, где $\Delta_h^l f(x)$ – конечная разность порядка l функции f в точке $x \in R^m$ с шагом h ; $\Omega_l(0, d] \equiv \Omega_l$ – класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определённых на $(0, d]$, $d = \pi m^{1/2}$, и удовлетворяющих условиям: $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ ($\delta \downarrow 0$) и $\delta^{-l} \omega(\delta) \downarrow$ ($\delta \uparrow$).

Очевидно, что если $\omega \in \Omega_l$, то последовательность $w = \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$, где $\omega_n = \omega(d/n)$, $n \in N$, удовлетворяет условиям: $0 < \omega_n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$) и $n^l \omega_n \uparrow$ ($n \uparrow$).

Для заданных чисел $\lambda \in [1, \infty)$, $\sigma \in [0, \infty)$ и последовательности $z = \{z_\nu\} \subset R$ ($z_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \dots$) положим

$$U_{n,\sigma}^{(\lambda)}(z) = \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\lambda\sigma-1} z_\nu^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad n \in N \cup \{\infty\},$$

$$V_{n,\sigma}^{(\lambda)}(z) = \left(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\lambda\sigma-1} z_\nu^\lambda \right)^{1/\lambda}.$$

Теорема 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$, $f \in L_p(T^m)$, $r \in Z_+$, $l, k \in N$, $l > r$, $\theta = \min\{2, p\}$ при $p < \infty$ и $\theta(\infty) = 1$, $z = \{\omega_l(f; d/\nu)_{p,m}\}_{\nu=1}^\infty$ и $U_{\infty,r}^{(\theta)}(z) < \infty$ при $r > 0$; тогда $f \in W_p^r(T^m)$ при $r > 0$ и справедливы оценки ($n \in N$):

$$1) \max_{0 < |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_{p,m} \leq C_1(l, r, p, m) U_{\infty,r}^{(\theta)}(z);$$

$$2) \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/n)_{p,m} \leq C_2(l, k, r, p, m) \{\omega_l(f; d/n)_{p,m} \text{ при } r=0, l \leq k; n^{-k} U_{n,k}^{(\theta)}(z) \text{ при } r=0, l > k; V_{n,r}^{(\theta)}(z) \text{ при } r > 0, l \leq k+r; V_{n,r}^{(\theta)}(z) + n^{-k} U_{n,k+r}^{(\theta)}(z) \text{ при } r > 0, l > k+r\};$$

$$3) \text{ при } 1 < p < \infty, l < k+r \text{ и } \beta = \max\{2, p\} \\ n^{-(l-r)} U_{n,l-r}^{(\beta)}(\{\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/\nu)_{p,m}\}_{\nu=1}^\infty) \leq$$

$\leq C_3(l, k, r, p, m) \{\omega_l(f; d/n)_{p,m} \text{ при } r=0;$

$V_{n,r}^{(\theta)}(z) \text{ при } r>0\}$.

Замечание 1. 1) В случае ограниченных (в частности, непрерывных) на отрезке $[0,1] \subset R$ функций оценка сверху $\omega_k(f, \delta)$ посредством $\omega_l(f, \delta)$ при $k < l$ впервые доказана А.Маршо (см. [1], п. 2.4.21; см. также [2], п. 3.3.2, [3], § 3.3), где $\omega_l(f; \delta) = \sup \{ |\Delta_h^l f(x)| : 0 \leq x \leq 1-lh, 0 \leq h \leq \delta \}$, $0 < \delta \leq 1/l$; им же доказана оценка сверху $\omega_l(f^{(r)}; \delta)$ посредством $\omega_{r+1}(f; \delta)$ (см. [1], п. 2.5.28). Указанные оценки другим методом были получены в [4], § 4, пункт 1⁰, где также была установлена оценка сверху $\omega_k(f^{(r)}; \delta)$ посредством $\omega_l(f; \delta)$ в случае $r \in N, l \geq k+r$. Пример функции (непрерывной на отрезке $[0,1]$), показывающий, что оценки сверху $\omega_k(f^{(r)}; \delta)$ посредством $\omega_l(f; \delta)$ в случае $r=0, l > k$ и $r \in N, l = k+r$ являются точными в смысле порядка, приведен в [5] (см. также [3], § 3.3, § 3.5).

2) В случае $f \in L_p(T^m)$ неравенства, приведенные в пунктах 1) и 2) теоремы 1 (за исключением неравенства $\omega_k(f; \delta)_{p,m} \leq 2^{k-l} \omega_l(f; \delta)_{p,m}$ из пункта 2) при $r=0, l < k$) доказываются привлечением прямых и обратных теорем теории приближения периодических функций при $m=1$ и их многомерных аналогов при $m>1$ (см., напр., [6], теоремы А и В; там же приведена библиография). Оценка в 1) следует из неравенства (2) [6; теорема А] в силу неравенства

$$E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m} \leq C_4(l, m) \omega_l(f; d/n)_{p,m}$$

(см. [6; теорема В, неравенство (6)]):

$$\max_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_{p,m} \leq C_5(r, p, m) U_{\infty,r}^{(\theta)}(y) \leq C_5 \cdot C_4 \cdot U_{\infty,r}^{(\theta)}(z), \text{ где } y = \{E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m}\}_{n=1}^\infty,$$

$E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m}$ – полное наилучшее в метрике $L_p(T^m)$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $\leq (n-1) \in Z_+$ по каждой из переменных $x_i, i = \overline{1, m}$. Оценка в

2) при $r=0, l > k$ и $r > 0, l > k+r$ следует соответственно из неравенств (1) и (4) [6; теорема А] в силу неравенства (6) [6; теорема В]:

$$\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/n)_{p,m} \leq C_6(k, r, p, m) \times \{r \cdot V_{n,r}^{(\theta)}(y) + n^{-k} U_{n,k+r}^{(\theta)}(y)\} \leq C_6 \cdot C_4 \cdot \{r \cdot V_{n,r}^{(\theta)}(z) + n^{-k} U_{n,k+r}^{(\theta)}(z)\}, \quad n \in N.$$

Оценка в 2) при $r > 0, l \leq k+r$ устанавливается с помощью неравенства (3) [6; теорема А], неравенства (см., напр., [7; замечание 6]) $\omega_k(g; \delta)_{p,m} \leq m^k \delta^k \max_{|\gamma|=k} \|D^\gamma g\|_{p,m}$ ($g \in W_p^k(T^m)$), неравенства (6) [6; теорема В], неравенства

$$\max_{|\gamma|=l} \|D^\gamma T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} \leq C_7(l, m) (C_4 + 2^{-l}) \times n^l \omega_l(f; d/n)_{p,m} \text{ при } l = k+r \text{ (при } m=1 \text{ и } p=\infty \text{ см. [8], теорема 3, неравенство (4.5)) и свойства почти убывания } \delta^{-l} \omega_l(f; \delta)_{p,m} \text{ с постоянной } 2^l:$$

$$\begin{aligned} \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/n)_{p,m} &\leq 2^k \max_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f(\cdot) - D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} + \\ &+ \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot); d/n)_{p,m} \leq \\ &\leq 2^k C_8(r, p, m) \{n^r E_{n-1, \dots, n-1}(f)_{p,m} + V_{n,r}^{(\theta)}(y)\} + \\ &+ m^k d^k n^{-k} \max_{|\gamma|=k+r} \|D^\gamma T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} \leq \\ &\leq 2^k C_8(r, p, m) \cdot C_4(l, m) \{n^r \omega_l(f; d/n)_{p,m} + \\ &+ V_{n,r}^{(\theta)}(z)\} + m^k d^k C_7(k+r, m) (C_4(k+r, m) + \\ &+ 2^{-(k+r)}) n^r \omega_{k+r}(f; d/n)_{p,m} \leq \\ &\leq C_2(l, k, r, p, m) V_{n,r}^{(\theta)}(z), \end{aligned}$$

где $T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)$ – полином полного наилучшего приближения функции f в метрике $L_p(T^m)$: $\|f(\cdot) - T_{n;p}^{(m)}(f; \cdot)\|_{p,m} = E_{n, \dots, n}(f)_{p,m}$.

3) Оценка, приведенная в пункте 3) теоремы 1, представляет собой уточнение в случае $1 < p < \infty$ оценки из пункта 2) при $r=0, l < k$ и $r > 0, l < k+r$. Оценка в 3) при $m=1, r=0$ установлена в [9; теорема 3, левая оценка в (6) на с.20]; доказательство

приведено в [10; § 1.3, теорема 1.3.3, доказательство неравенства (1.70) на с.43-46] (см. также [11; предложение 1.16, (1)], [12; неравенство (7) на с.41], где приводится короткое доказательство указанной оценки). Оценка в 3) при $m = 1$, $r > 0$ получена автором в [12; неравенство (18) на с.43].

При $m > 1$ для доказательства оценки в 3) привлекаются m -мерные аналоги соответствующих одномерных результатов. В случае $r = 0$ (см. также [11], [12], случай $m = 1$) необходимо привлечь правую оценку в (9) [9; теорема 5] (см. также [10; теорема 2.4.3, неравенство (2.67) на с.119], [6; теорема A, неравенство (1)]), применить неравенство Харди [13; с.308, теорема 346] при $p \neq 2$ ($\Rightarrow \beta / \theta > 1$, $(k-l)\beta + 1 > 1$) и изменить порядок суммирования при $p = 2$ ($\Rightarrow \beta / \theta = 1$), а затем воспользоваться левой оценкой в (9) [9; теорема 5] (см. также [10; теорема 2.4.3, неравенство (2.66) на с.118], [6; замечание 10, неравенство (10) при $r = 0$]):

$$\begin{aligned} & U_{n,l}^{(\beta)}(\{\omega_k(f; d/v)_{p,m}\}_{v=1}^{\infty}) \leq \\ & \leq C_9 \left\{ \sum_{v=1}^n v^{-(k-l)\beta-1} \left(\sum_{\mu=1}^v \mu^{\theta k-1} E_{\mu-1, \dots, \mu-1}^{\theta}(f)_{p,m} \right)^{\beta/\theta} \right\}^{1/\beta} \leq \\ & \leq C_{10}(l, k, p, m) U_{n,l}^{(\beta)}(y) \leq C_{10} \cdot C_{11}(l, p, m) \times \\ & \times n^l \omega_l(f; d/n)_{p,m}, \quad C_9 = C_9(k, p, m). \end{aligned}$$

В случае $r > 0$ следует применить оценку в 3) при $r = 0$ и воспользоваться оценкой в 2) при $r > 0$ и $k = l - r$ (см. [12], неравенство (18) на с. 43):

$$\begin{aligned} & n^{-(l-r)} U_{n,l-r}^{(\beta)}(\{\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/v)_{p,m}\}_{v=1}^{\infty}) \leq \\ & \leq C_3(l-r, k, 0, p, m) \max_{|\alpha|=r} \omega_{l-r}(D^\alpha f; d/n)_{p,m} \leq \\ & \leq C_3(l-r, k, 0, p, m) \cdot C_2(l, l-r, p, m) V_{n,r}^{(\theta)}(z). \end{aligned}$$

4) Оценки, приведенные в пункте 2) теоремы 1, принято называть неравенствами типа Маршо в $L_p(T^m)$. Эти оценки допускают эквивалентную формулировку в интегральной форме записи (см., напр., [14; предложение 2]). Имеется обширная литература, посвященная получению и развитию

разных методов доказательства подобного типа оценок в различных функциональных пространствах. Специфика пространства $L_p(T^m)$ позволяет использовать известные неравенства теории приближений, что и было отмечено в схеме доказательства, приведенной в пункте 2).

Для заданных $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$, $l \in N$ и $\omega \in \Omega_l$ обозначим

$$H_{p,m}^l[\omega] = \{f \in L_p(T^m) : \omega_l(f; \delta)_{p,m} \leq \omega(\delta), \delta \in (0, d]\}.$$

Теорема 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$, $r \in Z_+$, $l, k \in N$, $l > r$, $\omega \in \Omega_l$, $w = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $U_{\infty,r}^{(\theta)}(w) < \infty$ при $r > 0$; тогда ($n \in N$)

- 1) $\sup_{0 < |\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_{p,m} : f \in H_{p,m}^l[\omega] \} \asymp U_{\infty,r}^{(\theta)}(w);$
- 2) $\sup_{|\alpha|=r} \{\max_k \omega_k(D^\alpha f; d/n)_{p,m} : f \in H_{p,m}^l[\omega]\} \asymp$
 $\{\omega(d/n) \text{ при } r = 0, l \leq k;$
 $n^{-k} U_{n,k}^{(\theta)}(w) \text{ при } r = 0, l > k;$
 $V_{n,r}^{(\theta)}(w) \text{ при}$
 $r > 0, l \leq k + r; V_{n,r}^{(\theta)}(w) + n^{-k} U_{n,k+r}^{(\theta)}(w) \text{ при}$
 $r > 0, l > k + r\};$
- 3) при $1 < p < \infty$, $l < k + r$ и $\beta = \max\{2, p\}$
 $\sup \{n^{-(l-r)} U_{n,l-r}^{(\beta)}(\{\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f; d/v)_{p,m}\}_{v=1}^{\infty}) :$
 $f \in H_{p,m}^l[\omega]\} \asymp \{\omega(d/n) \text{ при } r = 0; V_{n,r}^{(\theta)}(w) \text{ при}$
 $r > 0\}.$

Замечание 2. 1) Оценка сверху в 1) имеет место в силу 1) теоремы 1; оценка снизу реализуется функцией $(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ (см. ниже 1) и 3) леммы 1). Из утверждения 1) следует, что условие $U_{\infty,r}^{(\theta)}(w) < \infty$ при $l > r > 0$ необходимо и достаточно для справедливости включения $H_{p,m}^l[\omega] \subset W_p^r(T^m)$.

2) Оценка сверху в 2) непосредственно следует из неравенств 2) теоремы 1. Оценка снизу в 2) при $r = 0$, $l < k$ реализуется индивидуальной функцией $(C_{20})^{-1} \Phi(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ в случаях $p = 1$, $p = \infty$ (см. ниже 2) леммы 2 при $r = 0$) и семейством функций $\{(C_{23})^{-1} \Psi_n(\cdot; p; m; \omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset H_{p,m}^l[\omega]$ в случае

$1 < p < \infty$ (см. ниже 2) леммы 3 при $r = 0$). Оценка снизу в 2) при $r = 0$ и $l \geq k$ реализуется индивидуальной функцией

$(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ в случаях $1 \leq p \leq \infty$, $l = k$ (см. ниже 1) леммы 1; при $p = 1$, $p = \infty$ см. также 1) леммы 2) и $1 \leq p \leq \infty$, $l > k$ (см. ниже 2) леммы 1). При $r > 0$ оценка снизу в 2) реализуется функцией $(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ в случае $1 \leq p \leq \infty$, $l \geq k + r$ (см. ниже 4) леммы 1), функциями $(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ (см. ниже 4) леммы 1) и

$(C_{20})^{-1} \Phi(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ (см. ниже 2) леммы 2 при $r > 0$) в случае $p = 1$, $p = \infty$ и $l < k + r$, функцией

$(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ (см. ниже 4) леммы 1) и семейством

$\{(C_{23})^{-1} \Psi_n(\cdot; p; m; \omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset H_{p,m}^l[\omega]$ (см. ниже 2) леммы 3 при $r > 0$) в случае $1 < p < \infty$ и $l < k + r$.

3) Оценка сверху в 3) непосредственно следует из неравенства 3) теоремы 1; оценка снизу в 3) реализуется индивидуальной функцией $(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$ в силу 5) (случай $r = 0$, $\lambda = \beta$) и 6) (случай $r > 0$, $\lambda = \beta$) леммы 1.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$, $l, k, r \in N$, $l > r$, $\rho = l - (k + r)$, $\lambda \in [1, \infty)$; для каждой функции $\omega \in \Omega_l$ существует функция $F(\cdot; p; m; \omega) \in L_p(T^m)$, обладающая следующими свойствами:

1) $C_{12}(l, p, m)\omega(\delta) \leq \omega_l(F; \delta)_{p,m} \leq C_{13}(l, p)\omega(\delta)$, в частности, при $p = \infty$ $C_{14}(l)\omega(\delta) \leq \omega_l(F; \delta)_{\infty,m} \leq C_{15}(l)\omega(\delta)$, $\delta \in (0, d]$;

2) $n^{-k} U_{n,k}^{(\theta)}(w) \leq C_{16}(l, k, p, m) \omega_k(F; d/n)_{p,m}$ при $l > k$, $n \in N$;

3) $F \in W_p^r(T^m) \Leftrightarrow U_{\infty,r}^{(\theta)}(w) < \infty$, при этом $\max_{|\alpha|=r} \|D^\alpha F\|_{p,m} \asymp U_{\infty,r}^{(\theta)}(w)$;

4) если $U_{\infty,r}^{(\theta)}(w) < \infty$, то

$$V_{n,r}^{(\theta)}(w) + \chi(\rho) n^{-k} U_{n,k+r}^{(\theta)}(w) \leq C_{17}(l, k, r, p, m) \times \times \{ \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha F; d/n)_{p,m} \text{ при } l \geq k + r;$$

$$\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha F; d/n)_{p,m} + n^r \omega(d/n) \text{ при } l < k + r \}, n \in N, \text{ где}$$

$$\chi(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq 0; \\ 1 & \text{при } \rho > 0; \end{cases}$$

$$5) n^{-l} U_{n,l}^{(\lambda)}(\{\omega_k(F; d/v)_{p,m}\}_{v=1}^{\infty}) \asymp \omega(d/n) \text{ при } l < k, n \in N;$$

$$6) \text{ если } U_{\infty,r}^{(\theta)}(w) < \infty \text{ и } 0 < l - r < k, \text{ то}$$

$$V_{n,r}^{(\theta)}(w) \leq C_{18}(l, k, r, p, m, \lambda) \times$$

$$n^{-(l-r)} U_{n,l-r}^{(\lambda)}(\{\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha F; d/v)_{p,m}\}_{v=1}^{\infty}), n \in N.$$

Замечание 3. 1) Утверждения 1) (правая оценка), 2), 3) и 4) (случай $l \geq k + r$) леммы 1 при $m = 1$ анонсированы в [15; лемма 3]. Лемма 1, пункты 1) - 4), при $m = 1$ доказана в [11; лемма 3.8 и предложение 1.2]; там же приведена подробная библиография. Полное доказательство леммы 1 при $m = 1$ приведено в [12; лемма 5].

2) При $m > 1$ утверждения 1) - 4) леммы 1 доказаны в [14; теорема 1], а утверждения 5) и 6) доказываются аналогично тому, как это было сделано в [12] (см. там доказательство 5) и 7) леммы 5) при $m = 1$. В случае $m > 1$ полагаем (см. доказательство теоремы 1 в [14], с.48-52) $F(x; p; m; \omega) = (1/m) \cdot (f_0(x_1; p; \omega) + \dots + f_0(x_m; p; \omega))$, где функция $f_0 \in L_p(T)$ является искомой при $m = 1$. Отметим также, что при доказательстве леммы 1 существенно используются сформулированные в [6] лемма 4 (см. там также замечание 8) и лемма 1 (см. там также замечание 3).

Лемма 2 (см. также [6], лемма 2 и замечание 6). Пусть $m \geq 1$, $p = 1$ либо $p = \infty$, $l, k \in N$, $r \in Z_+$, $\omega \in \Omega_l$; существует функция $\Phi(\cdot; p; m; \omega) \in L_p(T^m)$ такая, что:

$$1) C_{19}(l, p)\omega(\delta) \leq \omega_l(\Phi; \delta)_{p,m} \leq C_{20}(l, p, m)\omega(\delta), \delta \in (0, d];$$

$$2) \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha \Phi; d/n)_{p,m} \geq C_{21}(l, r, p) n^r \omega(d/n),$$

если $\Phi \in W_p^r(T^m)$ при $r > 0$, $n \in N$.

Лемма 3 (см. также [6], лемма 3 и замечание 7). Пусть $m \geq 1$, $1 < p < \infty$, $l, k \in N$, $r \in Z_+$, $\omega \in \Omega_l$; существует последовательность функций $\{\Psi_n(\cdot; p; m; \omega)\}_{n=1}^\infty \subset L_p(T^m)$ такая, что:

$$1) C_{22}(l, p, m) \omega(\delta) \leq \omega_l(\Psi_n; \delta)_{p,m} \leq C_{23}(l, p, m) \omega(\delta), \delta \in (0, d];$$

$$2) \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha \Psi_n; d/n)_{p,m} \geq C_{24}(k, r, p, m) n^r \omega(d/n), n \in N.$$

Замечание 4. Если функция $\omega \in \Omega_l$ удовлетворяет условию (эквивалентному S_l -условию Стечкина): существует число $\tau \in (0, l)$ такое, что $\delta^{-(l-\tau)} \omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$, то оценка снизу в пункте 2) теоремы 2 в случае $1 < p < \infty$, $r=0$, $l < k$ и $r > 0$, $l < k+r$ реализуется индивидуальной функцией $(C_{13})^{-1} F(\cdot; p; m; \omega) \in H_{p,m}^l[\omega]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marchaud A.* Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles // *Journal de Math. Pures et Appl.*, sér. 9, 1927, tome 6, fasc.IV, p.337 - 425.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
4. *Брудный Ю.А., Гопенгауз И.Е.* Приближение кусочно-полиномиальными функциями // *Изв.АН СССР, сер.матем.*, 1963, т.27, № 4, с.723 - 746.
5. *Шевчук И.А.* Некоторые замечания о функциях

типа модуля непрерывности порядка $k \geq 2$ // *Сб.: Вопросы теории приближения функций и ее приложения.* Киев, 1976, с.194-199.

6. *Ильясов Н.А.* Многомерные аналоги прямых и обратных теорем теории приближений периодических функций в пространствах $L_p(T^m)$: порядковая точность неравенств и критерии вложения функциональных классов // *Доклады НАН Азербайджана*, 2013, т. 69, №1, с.3 - 14.

7. *Ильясов Н.А.* On the order of magnitude of the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series with respect to cubes on the function classes $H_{p,m}^l[\omega]$ // *Analysis Mathematica*, 2002, v. 28, № 1, p.25 - 42.

8. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // *Изв. АН СССР, сер.матем.*, 1951, т.15, № 3, с.219 - 242.

9. *Тиман М.Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p // *Сб.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.* Баку: АН Азерб.ССР, 1965, с.18 - 26.

10. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. Днепропетровск: Полиграфист, 2000.

11. *Ильясов Н.А.* Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций // *Дис. ... канд.физ.-мат. наук.* Баку, 1987, 150 с.

12. *Ильясов Н.А.* К неравенствам между наилучшими приближениями и модулями гладкости разных порядков периодических функций в L_p , $1 \leq p \leq \infty$ // *Сингулярные интегральные операторы (темат.сб.научн.трудов).* Баку: Бакинский гос. ун-т, 1991, с.40 - 52.

13. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИИЛ, 1948.

14. *Ильясов Н.А.* О порядках L_p -модулей гладкости функций на m -мерном торе // *Сингулярные интегральные операторы (темат. сб. научн. трудов).* Баку: Азерб. гос. ун-т, 1989, с.43 - 58.

15. *Ильясов Н.А.* Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p , $1 \leq p \leq \infty$ // *Доклады АН СССР*, 1984, т.276, № 6, с.1301 - 1304.

*Институт математики и механики
НАН Азербайджана*

$L_p(T^m)$ FƏZALARINDA MARŞO TIPLI BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN TƏRTİB MƏNASINDA DƏQİQLİYİ HAQQINDA

N.Ə.İlyasov

$L_p(T^m)$ fəzalarında funksiyaların və onların törəmələrinin tam hamarlıq modulları üçün Marşo tipli bərabərsizliklərin verilmiş sinifdə tərtib mənasında dəqiqliyi göstərilmişdir.

Açar sözlər: *tam hamarlıq modulu, tam ən yaxşı yaxınlaşma, Marşo tipli bərabərsizliklər, sinifdə tərtib mənasında dəqiqlik*

ON THE EXACTNESS IN THE SENCE OF ORDER OF THE MARCHAUD'S TYPE INEQUALITIES IN THE SPACES $L_p(T^m)$

N.A.İlyasov

The exactness in the sence of order on the given classe of the Marchaud's type inequalities for total moduli of smoothness of functions and their derivatives in the spaces $L_p(T^m)$ was established.

Keywords: *total modulus of smoothness, total best approximation, Marchand's type inequalities, exactness in the sence of order on the classe*