

УДК 517.95

Математика

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р. З. Гумбаталиев

(Представлено академиком НАН Азербайджана Т.А.Алиевым)

В данной работе находим условия на коэффициенты операторного пучка $P(\lambda)$, которые обеспечивают существование и единственность регулярного решения задачи, полноту системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевой задаче, и полноту элементарных решений в пространстве всех регулярных решений задачи.

Ключевые слова: операторно-дифференциальные уравнения, гильбертовы пространства, самосопряженный оператор

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - положительно-определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$. Обозначим через H_α шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A , т.е. $H_\alpha = D(A^\alpha)$, $(x, y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y)$, $x, y \in H_\alpha$, $\alpha \geq 0$. При $\alpha = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Обозначим через $L_2(R; H_\alpha)$ гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определенных в $R_+ = (0, \infty)$ почти всюду, со значениями в H_α , измеримых и квадратично интегрируемых в $R_+ = (0, \infty)$ и определим норму

$$\|f\|_{L_2(R; H)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, определим весовые функциональные пространства. Пусть $\gamma = (-\infty, \infty)$. Обозначим через $L_{2,\gamma}(R; H_{2n}) = \{f(t) : f(t)e^{-\gamma t} \in L_2(R; H_{2n})\}$ и определим в этом гильбертовом пространстве норму следующим образом:

$$L_{2,\gamma}(R_+; H) = \left\{ f(t) / \|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 e^{-2\gamma t} dt \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Гильбертово пространство $W_{2,\gamma}^{2n}(R; H)$ определяется следующим образом:

$$W_{2,\gamma}^{2n} = \left\{ u(t) / u^{(2n)}, A^{2n}u \in L_{2,\gamma}(R_+; H), \right. \\ \left. \|u\|_{W_{2,\gamma}^{2n}} = \left(\|u^{(2n)}\|_{L_{2,\gamma}}^2 + \|A^{2n}u\|_{L_{2,\gamma}}^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Рассмотрим в пространстве H краевую задачу

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2 \right)^n (t) + \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j} u^{(j)}(t) = f(t), t \in R_+ = (0, +\infty). \quad (1)$$

$$u^{(s_v)}(0) = 0, \quad v = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

где $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} \leq 2n-1$, s_v - целые числа, $f(t)$ и $u(t)$ -вектор-функции, определенные почти всюду в R_+ , со значениями из H , производные понимаются в смысле теории распределений [1], A_j ($j = \overline{0, 2n-1}$)- линейные операторы в H .

Свяжем задачу (1), (2) со следующим операторным пучком

$$P(\lambda) = (-\lambda^2 E + A^2)^n + \sum_{j=1}^n A_{n-j} \lambda^j. \quad (3)$$

В дальнейшем, предполагается выполнение следующих условий:

1) A - положительно-определенный

самосопряженный оператор с нижней границей μ_0 , т.е. $A = A^* \geq \mu_0 E$ ($\mu_0 > 0$);

2) операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0, 2n}$) – суть ограниченные операторы в H ; 3) оператор $E + B_{2n}$ ограничен в H .

Отметим, что при выполнении условий 1)-3) операторный пучок $P(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.

Определение 1. Если λ_j ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$) – собственные значения пучка $P(\lambda)$, то вектор-функции

$$u_{j,h}(t) = e^{\lambda_j t} \left(\frac{t^h \varphi_0}{h!} + \frac{t^{h-1} \varphi_1}{(h-1)!} + \dots + \varphi_h \right),$$

$$h = 0, \dots, m-1$$

удовлетворяющие уравнению $P(d/dt)u(t) \equiv 0$, называются элементарными решениями однородного уравнения $P(d/dt)u(t) \equiv 0$.

Теперь определим регулярные решения задачи (1), (2).

Определение 2. Если вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^{2n}(R_+; H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+ , то его будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 3. Если регулярное решение уравнения (1) $u(t)$ удовлетворяет граничным условиям (2) в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u^{(v)}(t)\|_{H_{2n-s_v-1/2}} = 0,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^{2n}(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H)},$$

то задачи (1), (2) будем называть регулярно разрешимыми.

Сперва исследуем простую задачу

$$P_0 u(t) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2 \right)^n u(t) = f(t), \quad (4)$$

$$u^{(v)}(0) = 0, \quad v = \overline{0, n-1}. \quad (5)$$

Для исследования разрешимости задачи (4), (5) обозначим через $\hat{f}(\xi)$ преобразования вектор-функций $f(t)$ (считаем, что $f(t)$ продолжена на $(-\infty, 0)$ как ноль). После замены $u(t) = v(t)e^{\gamma t}$ имеем

$$\left(-\left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 + A^2 \right)^n v(t)e^{\gamma t} = f(t) \quad \text{или}$$

$$\left(-\left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 + A^2 \right)^n v(t) = g(t), \quad (6)$$

где $g(t) = f(t) \cdot e^{-\gamma t} \in L_2(R_+; H)$. Тогда краевые условия (2.20) примут вид

$$v^{(v)}(0) = 0, v = \overline{0, n-1}. \quad (7)$$

Очевидно, что регулярная разрешимость (6), (7) в $L_2(R_+; H)$ эквивалентна регулярной разрешимости задачи (4), (5) в $L_{2,\gamma}(R_+; H)$. Займемся решением задачи (6), (7) в $L_2(R_+; H)$, т.е. когда $g(t) \in L_2(R_+; H)$, $v(t) \in W_2^{2n}(R_+; H)$.

В данной работе мы находим условия, налагаемые на коэффициенты операторного пучка $P(\lambda)$, которые обеспечивают существование и единственность регулярного решения задачи (1), (2), полноту системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов (с.п.в.), отвечающих краевой задаче (1), (2), и полноту элементарных решений в пространстве всех регулярных решений задачи (1), (2). Отметим, что для обыкновенных дифференциальных операторов базисность некоторой подсистемы с.п.в. пучка М.В. Келдыша исследована в работе [3]. В работах [4, 59] аналогичные вопросы рассмотрены в других пространствах на полуоси. В этих работах главная часть уравнения имеет вид $(-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} + A^{2m}$ и условия

разрешимости существенно отличаются от наших условий.

Теорема 1. Пусть A - самосопряженный положительно-определенный оператор, причем $A \geq \mu_0 E (\mu_0 > 0)$. Тогда при $|\gamma| < \mu_0$ задача (6), (7) имеет единственное регулярное решение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и операторы $B_j = A_j \cdot A^{-j} (j = \overline{0, 2n-1})$ ограничены в H . Тогда при выполнении условия

$$\alpha(\gamma; \mu_0) = \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{C}_j(\gamma; \mu_0) \|B_{2n-j}\| < 1,$$

$$\text{где } \tilde{C}_j(\gamma; \mu_0) = c_j^{1/2}(\gamma, \mu_0) c_0^{1/2}(\gamma, \mu_0),$$

$$c_0(\gamma; \mu_0) = \frac{\mu_0^{2n}}{(\mu_0^{2n} - \gamma^2)^n},$$

$$c_j(\gamma; \mu_0) = \begin{cases} d_{2n,j}^n \left(1 - 2 \frac{\gamma^2}{\mu_0^2}\right)^{\frac{j-2n}{2n}} & \text{при } 0 \leq \frac{\gamma^2}{\mu_0^2} < \frac{j}{2n+j} \\ \frac{|\mu_0|^j \mu_0^{2n-j}}{(\mu_0^{2n} - \gamma^2)^n} & \text{при } \frac{j}{2n+j} \leq j < 1, j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

при $j = \overline{n+1, 2n}$

$$\tilde{C}_j(\gamma; \mu_0) = \sum_{p=0}^j C_p^j \frac{|\gamma|^{j-p}}{\mu_0^{j-p}} N_p(R_+; H; \{v\}_{v=0}^{n-1}) \|P_0 P_{0,\gamma}^{-1}\|,$$

где

$$N_j(R_+, (v)_{v=0}^{n-1}) = \begin{cases} d_{2n,j}^{-n} & \text{если } \det \dot{S}_j(\beta) \neq 0, \beta \in (0, d_{2n,n}^{2n}), \\ \dot{\mu}_j^{-1/2} & \text{если } \det \dot{S}_j(\beta) = 0, \beta \in (0, d_{2n,n}^{2n}), \end{cases}$$

а $\dot{S}_j(\beta)$ есть матрица, полученная от матрицы $S_j(\beta)$ отбрасыванием первых n строк

и столбцов, а $\dot{\mu}_j$ есть наименьший корень уравнения $\det \dot{S}_j(\beta) = 0$ из интервала $(0, d_{2n,j}^{-2n})$.

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима в весовых пространствах.

Далее, оценивая резольвенту операторного пучка $P(\lambda)$ на некоторых лучах с использованием методики работ [2, 6], доказывается

Теорема 3. Пусть $0 \leq \gamma < \mu_0$ и выполняются условия теоремы 1 и одно из следующих условий: $A^{-1} \in \sigma_p(0 < p < 1)$ или $A^{-1} \in \sigma_p(0 < p < \infty)$, $B_j \in \sigma_\infty(j = \overline{1, 2n})$. Тогда корневые векторы пучка $P(\lambda)$, определенного из (3), отвечающие собственным значениям из полуплоскости $\Pi(-\gamma) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -\gamma\}$, $(0 \leq \gamma < \mu_0)$, полны в пространстве $H_{2n-j-1/2}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда элементарные решения, отвечающие собственным значениям из $\Pi(-\gamma)$, $(0 \leq \gamma < \mu_0)$, полны в пространстве всех регулярных решений $P(d/dt)u(t) \equiv 0$ в весовых пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Келдыш М.В. // УМН, 1971, т.26, №4, с.15-41.
3. Ильин В.А. // ДАН, 1976, т.227, №4, с.796-799.
4. Гасымов М.Г. // Изв. АН Арм.ССР. Математика, 1971, т. 6, № 2/3, с. 131-147.
5. Мирзоев С.С. // ДАН, 1983, т. 273, № 2, с. 292-295.
6. Радзиевский Г.В. Квадратичный операторный пучок. Препр. ИМ-76-24. Киев, 1976, 19 с.

Азербайджанский университет кооперации
Институт математики и механики
НАН Азербайджана

**BİR SİNİF YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SƏRHƏD
MƏSƏLƏSİNİN ÇƏKİLİ FƏZADA ELEMENTAR HƏLLƏR SİSTEMİNİN
TAMLIĞI HAQQINDA**

R.Z.Hümbətəliyev

Baxılan işdə sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün şərtlər tapılır, ona uyğun $P(\lambda)$ operatorlar dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorları sisteminin tamlığı, sərhəd məsələsinin elementar həllərinin bütün rəqulyar həllər fəzasında tamlığı araşdırılıb.

Açar sözlər: operator-diferensial tənlikləri, Hilbert fəzaları, qoşma operatoru

**COMPLETENESS OF SYSTEM OF ELEMENTARY SOLUTIONS FOR ONE CLASS OF THE
OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A HIGH
ORDER IN WEIGHT SPACE**

R.Z.Humbataliev

In this work we find conditions on coefficients of an operator bunch of $P(\lambda)$ which provide existence and uniqueness of the regular solution of a boundary value problems, completeness of system of derivative chains of eigen and associated vectors answering to a boundary value problems, and completeness of elementary decisions in space of all regular solutions of a problem.

Keywords: operator-differential equations, Hilbert spaces, self-adjoint operator