

УДК 517.43

Математика

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ТОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Член-корреспондент НАН Азербайджана Р.В.Гусейнов

Рассматривается эллиптический оператор высокого порядка, обобщающий стационарный оператор Шредингера. При определенных условиях на коэффициенты и потенциал, подсчитывается число отрицательных точек спектра этого оператора.

Ключевые слова: эллиптический оператор, отрицательный спектр, неравенства Харди, квадратичная форма

Вопрос об оценке числа точек отрицательного спектра эллиптических операторов изучался во многих работах [1]-[3].

В работе [4] рассматривались «квази-эллиптические» операторы с постоянными коэффициентами в R^n , в частности, таким является оператор

$$Lu = (-1)^m \Delta^m u + V(x)u, \quad x \in R^n.$$

Установлено, что если $V(x) \leq 0$,

$V(x) \not\equiv 0$, $2m \geq n$, то L имеет по крайней мере, $l = \frac{(p+n)!}{p!n!}$, где $p = \left[\frac{2m-n}{2} \right]$ точек отрицательного спектра с учетом их кратностей. Это утверждение оптимальное, т.е. существует $V(x) \leq 0$, такая, что оператор L имеет точно l точек отрицательного спектра. Заметим, что l есть число линейно независимых полиномов степени, не выше p в R^n .

Результаты и метод работы [4] применим для операторов с переменными коэффициентами вида:

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u + V(x)u, \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta} \equiv a_{\beta\alpha}$ – ограниченные измеримые функции в R^n такие, что

$$m_2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq m_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2, \quad (2)$$

где $m_1, m_2 = \text{const} > 0$.

В настоящей работе рассматриваются операторы вида (1) в R^n , где выполняется условие (2), однако, m_1, m_2 могут быть функциями. Таким образом, рассматриваются и вырождающиеся эллиптические операторы.

Дифференциальный оператор L определяется как неограниченный оператор $L_2(R^n) \rightarrow L_2(R^n)$ с помощью форм.

Будут установлены следующие теоремы.

Теорема 1. Если $m_1(x) \leq C(1+|x|^2)^{a/2}$, $a \geq 0$, $m_2(x)$ строго положительна на каждом компакте, $2m-n-a \geq 0$, $V(x) \leq 0$ имеет компактный носитель, то оператор L имеет, по крайней мере, l_a точек отрицательного спектра, где l_a число полиномов степени не выше $\left[\frac{2m-n-a}{2} \right]$.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 с $a < 0$, то оператор L имеет, по крайней мере, l_0 точек отрицательного спектра, где l_0 число полиномов степени $\leq \left[\frac{2m-n}{2} \right]$.

Везде при подсчете числа точек спектра учитывается их кратность.

Из общей теории эллиптических операторов следует, что на отрицательной полуоси спектр оператора L дискретный, если выполнены условия теорем 1,2.

Показывается, что оценки, приведенные

в теоремах 1,2, точные, т.е. существует $V(x) \leq 0$ с компактным носителем такая, что число точек отрицательного спектра в точности равно l_a при $a \geq 0$ и l_0 при $a < 0$. Теорема 1 содержательна только при $2m - n - a \geq 0$. Показывается, что если $2m - n - a < 0$, то существует $V(x) \leq 0$ такая, что спектр L неотрицательный.

При доказательствах используются следующие обобщения неравенства Харди:

Лемма 1. Если

$$\int_{R^n} |x|^a \sum_{\alpha=m} |D^\alpha u|^2 dx = J_{a,m}(u) < \infty$$

$a + n$ не является четным числом, $D^\beta u(0) = 0$ при всех β , $|\beta| \leq l$, то

$$\int_{R^n} |x|^{a-2m} |u|^2 dx \leq C J_{a,m}(u).$$

Лемма 2. Если $a + n = 2q$, $q \geq 0$ – целое, $J_{a,m}(u) < \infty$, то

$$\int_{R^n} |x|^{2-n} \sum_{|\alpha|=m-1+1} |D^\alpha u|^2 dx < c J_{a,m}(u).$$

При изучении оператора L большую роль играет квадратичная форма:

$$B[u, v] = \int_{R^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha u D^\beta v dx + \int_{R^n} V u^2 dx,$$

которая определена на $\dot{C}^\infty(R^n) \times \dot{C}^\infty(R^n)$.

Следующее хорошо известное утверждение будет использоваться: если $B[u, u]$ для всех $u \in E$ – подпространству $L_2(R^n)$ размерности k , то оператор L имеет, по крайней мере, k точек отрицательного спектра.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $\Theta(t) \in \dot{C}^\infty(R^1)$, такую, что $\Theta(t) \equiv 1$ при $t < 1$, $\Theta(t) \equiv 0$ при $t > 2$, $0 \leq \Theta(t) \leq 1$. Обо-

значим $x^s = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$, $s_i \geq 0$ – целые, $|s| = s_1 + \dots + s_n$. Оценим

$$B[x^s \Theta(\varepsilon \ln r), x^s \Theta(\varepsilon \ln r)], \quad r = |x|.$$

Используя условие (2) и проводя элементарные оценки, получим

$$\begin{aligned} B[x^s \Theta(\varepsilon \ln r), x^s \Theta(\varepsilon \ln r)] &\leq \\ &\leq \int_0^\infty \varepsilon^{-1} e^{(a+2|s|-2m+n)\frac{\tau}{\varepsilon}} \sum_{j=1}^m \left| \frac{d^j}{d\tau^j} \Theta(\tau) \right|^2 \varepsilon^{2j} d\tau \leq \\ &\leq C \varepsilon \int_0^\infty \sum_{j=1}^m \left| \frac{d^j}{d\tau^j} \Theta(\tau) \right|^2 d\tau \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если $a + 2|s| - 2m + n \leq 0$.

Обозначим $v_s = x^s \Theta(\varepsilon_s \ln r)$. Можно выбрать $0 < \varepsilon_s < 1$ так, что если $s' \neq s''$, $|s'| \leq l_a$, $|s''| \leq l_a$, то либо $\Theta(\varepsilon_s \ln r) = 1$ при $x \in \text{supp } \Theta(\varepsilon_{s'} \ln r)$, либо $\Theta(\varepsilon_s \ln r) = 1$ при $x \in \text{supp } \Theta(\varepsilon' \ln r)$. В таком случае

$$B[\omega, \omega] \leq C \sum_{|\alpha|=m} \int_{R^n} (1 + |x|^a) |D^\alpha \omega|^2 dx + \int_{R^n} V \omega^2 dx < 0,$$

где $\omega = \sum_{s=1}^l C_s v_s$, ε_s достаточно малы. Функ-

ции v_s линейно независимы. Если $\sum C_s^2 = 1$, то $B[\omega, \omega] \leq -\sigma^2 = \text{const} < 0$ и форма $B[u, u]$ отрицательна на пространстве размерности l_a , следовательно, L имеет l_a точек отрицательного спектра.

Теперь надо показать, что существует $V(x)$, такая, что число точек отрицательного спектра равно l_a . Пусть $V(x) = -\delta^2 = \text{const} < 0$ при $|x| < 1$, $V(x) \equiv 0$ при $|x| > 1$. Покажем, что если δ достаточно мало, то число точек отрицательного спектра равно l_a . Если их окажется больше l_a , то рассмотрим

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{l+1} C_i u_i, \quad \sum C_i^2 = 1,$$

где u_i ортонормированная система собственных функций, соответствующих λ_i .

Можно подобрать C_i , так, что $D^\alpha \bar{u}(0) = 0$

при $|\alpha| \leq l_a$. Применяя леммы 1,2 получим,

что $\int_{|x|<1} \bar{u}^2 dx \leq C J_{m,n,a}(\bar{u})$. С другой стороны,

$$J_{m,n,a}(\bar{u}) \leq \int_{R^n} V(x) \bar{u}^2 dx \leq \delta \int_{|x|<1} \bar{u}^2 dx \text{ и при } \delta$$

маленьком имеем противоречие.

Доказательство теоремы 2 проводится точно таким же путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об отрицательном спектре эллиптического оператора // Мат. сб., 1990, 181, №2, с.147-166.
2. Бирман М.С., Соломяк М.З. Качественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения в спектральной теории // 10-я мат.школа Института математики АН УССР, Киев, 1974, с. 5-189.
3. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов // М.:Физматгиз, 1963, с.1-339.
4. Guseinov R.V. On the number of the negative spectrum for quazielliptic operators // Russian Journal of Mathematical physics, 2008, vol. 15, N.3, p.316-319.

*Институт математики и механики
НАН Азербайджана*

ELLIPTİK OPERATORUN MƏNFİ SPEKTRİNİN NÖQTƏLƏRİNİN SAYININ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA

R.V.Hüseynov

Stasionar Şrödinqer operatorunu ümumiləşdirən yüksək tərtibli elliptik operatora baxılır. Əmsallar və potensial üzərinə müəyyən şərtlər daxilində bu operatorun mənfi spektrinin nöqtələri sayılır.

Açar sözlər: elliptik operator, mənfi spektr, Hardi bərabərsizliyi, kvadratik forma

ON ESTIMATION OF THE NUMBER OF NEGATIVE SPECTRUM POINTS OF ELLIPTIC OPERATORS

R.V.Huseynov

It is considered the elliptic operator of high order, which generates the stationary Schrodinger operator. In some conditions on coefficients and potential the number of negative spectrum points of this operator is counted.

Keywords: elliptic operator, negative spectrum, Hardy inequality, quadratic form