

УДК 517.977.58

Математика

ОБ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Академик НАН Азербайджана Ф.А.Алиев, В.Б.Ларин

Предложен базирующийся на алгоритмах линейных матричных неравенств алгоритм построения стабилизирующего решения дискретных периодических уравнений Риккати, возникающих как в задачах управления, так и в задачах фильтрации. Отмечается возможность построения антисtabilизирующего решения дискретного периодического уравнения Риккати. Показано, что данный алгоритм может быть эффективен и в случае т.н. модифицированного алгебраического уравнения Риккати.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение Риккати, линейное матричное неравенство, линейные периодические системы

Введение

Алгоритмы оптимизации по квадратичному критерию качества линейных периодических систем привлекали и продолжают привлекать внимание исследователей (см., например, [1,2,6,9,10], где есть дальнейшие ссылки). Суть проблемы состоит в следующем. Пусть движение объекта описывается периодической системой конечно-разностных уравнений

$$x(i+1) = \Psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Требуется при $x(0) \neq 0$ подходящим выбором стратегии управления (уравнения регулятора)

$$u(i) = f(x(i)) \quad (2)$$

минимизировать квадратичный критерий качества

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} x'(i)Q(i)x(i) + u'(i)C(i)u(i) \quad (3)$$

на классе асимптотически устойчивых систем (1)+(2).

Здесь $x(i)$, $u(i)$ – векторы фазовых координат и управляющих воздействий (штрих здесь и далее означает операцию транспони-

рования), матрицы $\Psi(i)$, $\Gamma(i)$, $Q(i) = Q'(i) \geq 0$, $C(i) = C'(i) \geq 0$ периодичны с периодом p , т.е. $\Psi(i+p) = \Psi(i)$, $\Gamma(i+p) = \Gamma(i)$ и т.д.

Известно (см., например, [1,5]), что уравнение оптимального регулятора (2) имеет следующий вид:

$$u(i) = -[\Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i) + C(i)]^{-1}\Gamma(i)S(i+1)\Psi(i)x(i). \quad (4)$$

Определяющая закон оптимального управления последовательность симметричных матриц $S(j)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S(j) = \Psi'(j)[S(j+1) - S(j+1)\Gamma(j)(C(j) + \Gamma'(j)S(j+1)\Gamma(j))^{-1}\Gamma'(j)S(j+1)]\Psi(j) + Q(j). \quad (5)$$

Таким образом, для определения закона управления (4) необходимо построить последовательность матриц $S(j)$, удовлетворяющих соотношению (5). Отметим, что вследствие периодичности матриц, входящих в условие задачи, стратегия управления не изменится, если начало отсчета сдвинуть на p индексов ($j = p, p+1, \dots$). Поэтому искомая последовательность матриц должна также удовлетворять условию периодичности

$$S(j+p) = S(j). \quad (6)$$

Решение уравнения (5) (последовательность матриц $(S(1), \dots, S(p))$), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1) + (4), будем называть стабилизирующим решением периодического дискретного уравнения Риккати ПДУР.

Однако, кроме стабилизирующего решения, ПДУР может иметь и другие решения, в частности, антистабилизирующее решение. Для нахождения таких решений можно использовать различные процедуры сведения ПДУР (5), (6) к дискретному алгебраическому уравнению Риккати (ДАУР) (см., например [1,3,9]) и далее применить те или иные алгоритмы для построения таких решений этих ДАУР. Следует отметить и связанные с задачами фильтрации разностные уравнения, аналогичные (5), но в которых изменена последовательность индексов j . Такого рода ПДУР можно получить по аналогии с [13], поставить в соответствие (5), ПДУР, стабилизирующее решение которого будет соответствовать антистабилизирующему решению ПДУР (5), (6). Итак, пусть фигурирующие в (5) матрицы $C(j)$ имеют обратные. Произведя замену $s(j) = -P^{-1}(j)$ и представив $Q(j) = H'(j)R^{-1}(j)H(j)$, можем записать (5) в виде аналогичной (12.4.14), (12.4.15) [5]

$$P(j+1) = \Psi(j)(P(j) - P(j)H'(j)(R(j) + H(j)P(j)H'(j))^{-1}H(j)P(j))\Psi'(j) + Q(j). \quad (7)$$

Это соотношение следует пополнить выражением аналогичным (6):

$$P(j+p) = P(j). \quad (8)$$

Таким образом, найдя стабилизирующее решение ПДУР (7), (8), можно в соответствии с $S(j) = -P^{-1}(j)$ построить антистабилизирующее решение ПДУР (5), (6).

Отметим, что в [14] приведен базирующийся на аппарате линейных матричных неравенств (ЛМН), алгоритм построения стабилизирующего решения ПДУР (5), (6). Ниже будет изложен также базирующийся на ЛМН алгоритм построения стабилизирующего решения ПДУР (7), (8), кото-

рый можно использовать для построения антистабилизирующего решения ПДУР (5), (6). Будет продемонстрировано, что базирующийся на ЛМН алгоритм построения стабилизирующего решения ДАУР может (при соответствующей модификации) быть использован для построения решения т.н. модифицированного алгебраического уравнения Риккати (МАУР) (modified algebraic Riccati equation [15]). Эти алгоритмы могут быть использованы в различных навигационных задачах [8, 11, 12].

1. Решение ДАУР с помощью ЛМН. Стационарному варианту задачи (1), (3) соответствует ДАУР, которое получается из соотношений (5), (6), если $p = 1$:

$$S = \Psi'S\Psi - \Psi'S\Gamma(C + \Gamma'S\Gamma)^{-1}\Gamma'S\Psi + Q. \quad (9)$$

Максимальное решение этого уравнения (это решение является стабилизирующим) может быть найдено путем использования процедур ЛМН. Согласно теореме 10 [14] искомое решение (9) имеет максимальный след ($\text{tr}(S)$) среди матриц S , удовлетворяющих следующим неравенствам

$$\begin{bmatrix} -S + \Psi'S\Psi + Q & \Psi'S\Gamma \\ \Gamma'S\Psi & C + \Gamma'S\Gamma \end{bmatrix} \geq 0, \quad C + \Gamma'S\Gamma > 0. \quad (10)$$

Другими словами, алгоритм определения искомого решения (9) сводится к определению матрицы S , имеющей максимальный след при выполнении условий (10). Реализация этого алгоритма может быть выполнена с помощью стандартной процедуры `mincx.m` пакета MATLAB [7].

В случае ПДУР (7), (8) при $p = 1$, аналогом (10) будут следующие ЛМН:

$$\begin{bmatrix} -P + \Psi R \Psi' & \Psi R H' \\ H R \Psi' & R + H P H' \end{bmatrix} \geq 0, \quad R + H P H' \geq 0. \quad (11)$$

В [15] приводится МАУР, которое отличается от ДАУР (9) только параметром $0 < q < 1$, а именно:

$$S = \Psi'S\Psi - q\Psi'S\Gamma(C + \Gamma'S\Gamma)^{-1}\Gamma'S\Psi + Q. \quad (12)$$

В [15] приведены условия существования решения (12). Аналогом ЛМН (10) для МАУР (11) будут следующие ЛМН:

$$\begin{bmatrix} -S + \Psi'S\Psi & \Psi'S\Gamma \\ \Gamma'S\Psi & (C + \Gamma'S\Gamma)/q \end{bmatrix} \geq 0 \quad C + \Gamma'S\Gamma \geq 0 \quad (13)$$

Таким образом, алгоритм построения решения (12) состоит в максимизации следа матрицы S , удовлетворяющей ЛМН (13).

2. Приведение ПДУР к системе ДАУР.

В [1, 9] показано, что в случае обратимости матриц $C(i)$, искомое значение каждой из p матриц $S(i)$ ($i=1, \dots, p$) является стабилизирующим решением ДАУР

$$S(i) = \phi'(i, p)[I + S(i)G(i, p)]^{-1}S(i)\phi(i, p) + R(i, p). \quad (14)$$

Здесь и далее I – единичная матрица соответствующего размера, остальные матрицы, фигурирующие в (14), определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \phi(i, n+1) &= \Psi(i+n)[I + G(i, n)Q(i, n)]^{-1}\phi(i, n), \\ \phi(i, 1) &= \Psi(i) \\ G(i, n+1) &= \Psi(i+n)[I + G(i, n)(n+i)]^{-1} \times \\ &\times G(i, n)\Psi'(n+i) + \Gamma(n+i)C^{-1}(n+i)\Gamma'(n+i) \quad (15) \\ G(i, 1) &= \Gamma(i)C^{-1}(i)\Gamma'(i), \\ R(i, n+1) &= R(i, n) + \phi'(i, n)Q(n+i) \times \\ &\times [I + G(i, n)Q(n+i)]^{-1}\phi(i, n), \\ R(i, 1) &= Q(i). \end{aligned}$$

Факторизовав симметричную матрицу $G(i, p)$, т.е. представив ее в виде произведения трех матриц: $G(i, p) = H(i)V(i)^{-1}H(i)'$, перепишем ДАУР (14) в более привычной форме:

$$S(i) = \phi'(i, p)[S(i) - S(i)H(i)(V(i) + H'(i)S(i)H(i))^{-1}H'(i)S(i)]\phi(i, p) + R(i, p). \quad (16)$$

Таким образом, исходному ПДУР ставится в соответствие совокупность ДАУР (их число равно p), определяемых соотношениями (14), (15) или (15), (16). В [3] была предложена

следующая модификация соотношений (14), (15), позволившая исключить процедуру обращения матрицы $C(i)$. Предполагая существование матриц

$$D(i) = (C(i) + \Gamma'(i)\Gamma(i))^{-1}.$$

Соотношения (14), (15) можно модифицировать в виде [1], где в этих соотношениях уже не фигурируют матрицы $C^{-1}(i)$. Отметим, что в [9] была предложена процедура приведения ПДУР к ДАУР с помощью преобразования соответствующего матричного пучка.

3. Решение ПДУР (5), (6) с помощью ЛМН. Выше было отмечено, что ПДУР может быть сведено к системе, состоящей из p ДАУР, записанных, например, в форме (16) $i=1, 2, \dots, p$

$$S(i) = \phi'(i, p)(S(i) - S(i)H(i)(V(i) + H'(i)S(i)H(i))^{-1} \times H'(i)S(i))\phi(i, p) + R(i, p). \quad (17)$$

Очевидным образом, модифицируя описанный в п. 1 алгоритм, для решения (17) (нахождения матриц $S(1), \dots, S(p)$) можно использовать следующую процедуру:

$$\max J, \quad J = \text{tr}(S(1) + S(2) + \dots + S(p)) \quad (18)$$

при условии выполнения $2p$ матричных неравенств: $j=1, \dots, p$

$$\begin{bmatrix} -S(j) + \phi'(j, p)S(j)\phi(j, p) + R(j, p) & \phi'(j, p)S(j)H(j) \\ H'(j)S(j)\phi(j, p) & V(j) + H'(j)S(j)H(j) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19)$$

$$V(j) + H'(j)S(j)H(j) > 0$$

Таким образом, показана возможность сведения задачи решения ПДУР к стандартным процедурам ЛМН.

Рассмотрим задачу $\max J$

$$J = \text{tr}(S(1) + \dots + S(p)) \quad (20)$$

при выполнении следующих $2p$ матричных неравенств

$$\Psi'(i)S(i+1)\Psi(i) - S(i) - \Psi'(i)S(i+1)\Gamma(i)(C(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i) + Q(i) \geq 0, \quad (21)$$

$$C(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (22)$$

Отметим, что задачи, определяемые (18), (19) и (20)-(22) имеют одинаковые решения.

Так, обозначим результат решения задачи (18), (19) как $\bar{S}(1), \dots, \bar{S}(p)$ и $\bar{J}$, а $\tilde{S}(1), \dots, \tilde{S}(p)$ и $\tilde{J}$ – результаты решения задачи (20)–(22). В [16] показано, что эти решения совпадают, т.е. показана невозможность следующей ситуации: $\bar{S}(j) \neq \tilde{S}(j), j=1, \dots, p, \tilde{J} > \bar{J}$.

Для окончательной формулировки предлагаемого алгоритма перепишем нелинейные матричные неравенства (21) в виде эквивалентных им [4, 7] линейных матричных неравенств:

$$\begin{bmatrix} \Psi'(p)S(1)\Psi(p) - S(p) + Q(p) & \Psi'(p)S(1)\Gamma(p) \\ \Gamma'(p)S(1)\Psi(p) & C(p) + \Gamma'(p)S(1)\Gamma(p) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

Таким образом, алгоритм решения ПДУР можно сформулировать следующим образом. Искомое решение ПДУР (матрицы $S(1), \dots, S(p)$) определяется в результате решения следующей задачи:

$$\max \text{tr}(S(1), \dots, S(p)) \quad (24)$$

при условии выполнения неравенств (22), (23).

4. Решение ПДУР (10), (11) с помощью ЛМН. Рассмотрим задачу, аналогичную (20)–(22), применительно к ПДУР (10), (11), т.е. рассмотрим задачу

$$\max J, \quad J = \text{tr}(S(1) + \dots + S(p)) \quad (25)$$

при выполнении следующих $2p$ матричных неравенств

$$\Psi(i)S(i)\Psi'(i) - S(i+1) - \Psi(i)S(i)H'(i)(R(i) + \quad (26)$$

$$+ H(i)S(i)H'(i))^{-1}H(i)S(i)\Psi(i) + Q(i) \geq 0,$$

$$R(i) + H(i)S(i)H'(i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (27)$$

Как и в случае задачи (22)–(24), можно утверждать, что матрицы $Q(i)$, заменив матрицами $\tilde{Q}(i) \leq Q(i)$, это не может привести к увеличению целевой функции (25). Таким образом, переписав неравенства (26) в виде, аналогичном (23):

$$\begin{bmatrix} \Psi(i)S(i)\Psi'(i) - S(i+1) + Q(i) & \Psi(i)S(i)H'(i) \\ H(i)S(i)\Psi'(i) & R(i) + H(i)S(i)H'(i) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (28)$$

$i = 1, 2, \dots, p$

можно, как и в п.3, сформулировать алгоритм построения стабилизирующего решения ПДУР (10), (11). Необходимо максимизировать (30) при выполнении ограничений (27), (28).

Заключение

Предложен базирующийся на ЛМН алгоритм построения стабилизирующего решения ПДУР, возникающий как в задачах управления, так и в задачах фильтрации. Отмечается возможность построения антистабилизирующего решения ПДУР. Показано, что данный алгоритм может быть эффективен и в случае т.н. модифицированного алгебраического уравнения Риккати [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of linear control systems: analytical methods and computation algorithms. Gordon and Breach science publi. Amsterdam, 1998, 261p.
2. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization Problems for Periodic Systems // Int. Appl. Mech., 2009, **45**, N 11, p. 1162–1188.
3. Bordyug B.A., Larin V.B. Algorithm of Solution of Riccati equations found in problems of H^∞ - optimization // Avtomatika, – 1991, No.3, p. 42–49
4. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM books, Philadelphia, 1994, 193 p.
5. Bryson A.E., Ho Y.C. Applied Optimal Control.– Optimization, Estimation and Control Watham Mass, 1968, 521p.
6. Colaneri P. Periodic Control Systems: Theoretical Aspects // Applied and Computational Mathematics, 2004, **3**, N 2, p. 84–94.
7. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. LMI Control Toolbox User's Guide. The Math Works Inc., 1995.
8. Karachun V.V., Mel'nik V.N. Influence of Diffraction Effects on the Inertial Sensors of a Gyroscopically Stabilized Platform: Three-Dimensional Problem // Int. Appl. Mech., 2012, **48**, N 4, p. 458–464.
9. Larin V.B. Optimization of Periodic Systems Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1978, **239**, p. 67–70.
10. Larin V.B. High-Accuracy Algorithms for Solving the Discrete-Time Periodic Riccati Equation // Int. Appl. Mech. 2007. **43**, N 9, p. 1028–1034.
11. Larin V.B., Tunik A.A. On Inertial Navigation System Error Correction // Int. Appl. Mech., 2012, **48**, N 2, p. 213–223.
12. Larin V.B., Tunik A.A. On Inertial-Navigation System without Angular-Rate Sensor // Int. Appl. Mech., 2013, **49**, N 4, p. 488–500.

13. Lin W.W., Xu S.F. Convergence Analysis of Structure-Preserving Doubling Algorithms for Riccati-Type Matrix Equations // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006, 38, N 1, p. 26–39.
14. Rami M.A., Zhou X.Y. Linear Matrix Inequalities, Riccati Equations, and Indefinite Stochastic Linear Quadratic Controls // IEEE Trans. Automat. Control. V.45, N 6, 2000, pp.1131-1143.
15. Silva E. I., Solis M. A. An Alternative Look at the Constant-Gain Kalman Filter for State Estimation Over Erasure Channels // IEEE Trans. Automat. Control. V.58, N 12, 2013, pp. 3259 – 3265.

*Институт прикладной математики БГУ
Институт механики Национальной
Академии наук Украины*

PERİODİK DİSKRET RİKKATİ TƏNLİYİNİN HƏLL ALQORİTMLƏRİ HAQQINDA

F.Ə.Əliyev, V.B.Larin

Xətti matris bərabərsizliklərinin alqoritmlərinə əsaslanan diskret periodic Rikkati tənliklərinin stabilizirici həllərinin qurulması alqoritm, həm də antistabilizirici həllərinin qurulmasının mümkünüyü qeyd olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, bu alqoritm eyni zamanda modifikasiya olunmuş cəbri Rikkati tənliyi halında da effektiv ola bilər.

Açar sözlər: cəbri Rikkati tənliyi, xətti matris bərabərsizliklər, periodik sistemlər

ABOUT ALGORITHM FOR SOLVING DISCRETE PERIODIC RICCATI EQUATION

F.A Aliev, V.B.Larin

Is proposed, based on the algorithm of linear matrix inequalities, an algorithm for constructing of a stabilizing solution and indicates the possibility of constructing of solutions of antistabilizing of discrete periodic Riccati. It is shown that this algorithm can be effective in the case of the so-called modified algebraic Riccati equation.

Keywords: algebraic Riccati equation, linear matrix inequalities, periodic system