

УДК 517.95

Математика

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА*

Н.А.Алиев¹, А.П.Гулиев², Р.М.Тагиев³

(Представлено академиком НАН Азербайджана Ф.А.Алиевым)

Рассматривается краевая задача для двухмерной системы уравнений гиперболического типа, возникающая при математическом моделировании процесса добычи нефти. Используя метод бесконечного ряда по фазовым координатам, доказываются как существование, так и единственность соответствующей краевой задачи. Результаты иллюстрируются на простом примере, когда данные из краевых условий постоянные и приводится аналитическое выражение для искомого решения.

Ключевые слова: системы гиперболического типа, краевая задача, метод рядов, существование и единственность, газлифт

Введение

Как известно, способ газлифта [1] является сложным процессом при добыче нефти из глубинных скважин [2, 3] и требует создания адекватной математической модели, позволяющей автоматизировать добычу нефти [4,5]. Однако, как показали исследования в этой же области [1,6,7], в отличие от [4,5], движения газа, газожидкостной смеси в разных областях описываются соответствующими краевыми задачами с помощью системы уравнений гиперболического типа [8], где возникают вопросы о существовании и единственности решений. В данной работе, используя метод бесконечных рядов [8,9], доказывается теорема существования и единственности решений вышесказанной краевой задачи. На простом примере иллюстрируются результаты теоремы и показывается, что решение данной краевой задачи может быть представлено в явном виде.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему уравнений гиперболического типа, возникающую при моделировании газлифтного процесса [6,7,10]

$$\begin{cases} -F_i \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial Q_i(x,t)}{\partial t} + 2a_i Q_i(x,t), \\ -F_i \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = c_i \frac{\partial Q_i(x,t)}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

при $i = 1, x \in (0, l)$; при $i = 2, x \in (l, 2l)$; $t \in (0, T)$,

с граничными условиями

$$P_i(0, t) = P_{i0}(t), \quad Q_i(0, t) = Q_{i0}(t), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

и

$$\begin{cases} P_2(l+0, t) = F_\delta^1 P_1(l-0, t) + \chi_1(P_1(l-0, t), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \bar{P}(t), \\ Q_2(l+0, t) = F_\delta^2 Q_1(l-0, t) + \chi_2(Q_1(l-0, t), \beta_1, \beta_2, \beta_3) \bar{Q}(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

где $F_i, a_i, c_i, F_\delta^i, i = 1, 2; \alpha_j$ и $\beta_j; j = \overline{1, 3}$; заданные вещественные постоянные числа (каждый из параметров имеет свой физический смысл [7]),

$P_{i0}(t), Q_{i0}(t), \bar{P}(t), \bar{Q}(t), \chi_1(P_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\chi_2(Q_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – заданные непрерывные вещественнозначные функции, $P(x, t), Q(x, t)$ искомые вещественные функции. Задача состоит в определении решения $P(x, t), Q(x, t)$ уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) и обсуждении вопросов их существования и единственности. Отметим, что упрощенные варианты моделирования, управления, стабилизации и др. газлифтного процесса, полученные из системы (1), подробно обсуждены в

* Работа поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР № 17, 2013-2015 гг.

работах [11,12].

Также в [13] рассмотрены другие вопросы задачи оптимизации.

Решение краевой задачи

Решение задачи (1) - (3) будем искать в виде ряда по переменной x , т.е.

$$P_i(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(t) \frac{x^k}{k!}, \quad Q_i(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{i,k}(t) \frac{x^k}{k!}, \quad (4)$$

если $i = 1$, то $x \in (0, l)$; если $i = 2$, то $x \in (l, 2l)$; $t \in (0, T)$, где $P_{1,0}(t)$ и $Q_{1,0}(t)$ заданы в граничном условии (2), а $P_{2,0}(t)$ и $Q_{2,0}(t)$, имеющие вид

$$\begin{cases} P_{2,0}(t) = P_2(l-0, t) = P_2(l, t) = P_2(l+0, t), \\ Q_{2,0}(t) = Q_2(l-0, t) = Q_2(l, t) = Q_2(l+0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

дается с помощью формулы (3), а остальные коэффициенты $P_{i,k}(t)$ и $Q_{i,k}(t)$ при $i = 1, 2; k > 0$ из выражения (4) подлежат определению.

Для определения этих коэффициентов, дифференцируя (4) как по переменной x , так и по t имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i(x, t)}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,k}(t) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k+1}(t) \frac{x^k}{k!}, \quad \frac{\partial P_i(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} P'_{i,k}(t) \frac{x^k}{k!}, \\ \frac{\partial Q_i(x, t)}{\partial x} &= \sum_{k=0}^{\infty} Q_{i,k+1}(t) \frac{x^k}{k!}, \quad \frac{\partial Q_i(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} Q'_{i,k}(t) \frac{x^k}{k!}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в систему уравнений (1), учитывая линейную независимость x^k при $k \geq 0$ для определения коэффициентов из ряда (4), приходим к следующему разностному уравнению [14]

$$\begin{cases} P_{i,k+1}(t) = -\frac{1}{F_i} Q'_{i,k}(t) - \frac{2a_i}{F_i} Q_{i,k}(t), \\ Q_{i,k+1}(t) = -\frac{F_i}{c_i} P'_{i,k}(t), \end{cases} \quad i = 1, 2; k \geq 0, t \in (0, T). \quad (6)$$

Заметим, что сперва при $i = 1$ из (6), учитывая (2), определяются $P_{1,k}(t)$ и $Q_{1,k}(t)$ при $k > 0$.

Далее, для системы (6) при $i = 2$, учитывая граничные условия, полученные с

помощью (3) и (5), определяем неизвестные функции $P_{2,k}(t)$ и $Q_{2,k}(t)$ при $k > 0$.

Эти неизвестные функции с помощью метода математической индукции из системы (6) определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{i,2k}(t) &= \left(\frac{d}{dt} + 2a_i \right)^k \frac{P_{i,0}^{(k)}(t)}{c_i^k}, \\ Q_{i,2k}(t) &= \left(\frac{d}{dt} + 2a_i \right)^k \frac{Q_{i,0}^{(k)}(t)}{c_i^k}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_{i,2k+1}(t) &= -\left(\frac{d}{dt} + 2a_i \right)^{k+1} \frac{Q_{i,0}^{(k)}(t)}{F_i c_i^k}, \\ Q_{i,2k+1}(t) &= -\left(\frac{d}{dt} + 2a_i \right)^k \frac{F_i P_{i,0}^{(k+1)}(t)}{c_i^{k+1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $i = 1, 2; k \geq 0; t \in (0, T)$.

Этим установлено следующее утверждение.

Теорема. Если $F_i, a_i, c_i, F_{\delta}^i, i = 1, 2; \alpha_j$ и $\beta_j; j = \overline{1, 3}$; заданные вещественные постоянные числа, $P_{1,0}(t), Q_{1,0}(t), \bar{P}(t), \bar{Q}(t), \chi_1(P_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\chi_2(Q_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ заданные вещественнозначные функции, $P_{i,0}(t)$ и $Q_{i,0}(t)$ при $i = 1, 2; t \in (0, T)$ бесконечно дифференцируемые функции, которые удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} |P_{i,0}^{(k)}(t)| &\leq M, \quad |Q_{i,0}^{(k)}(t)| \leq M, \quad i = 1, 2; k \geq 0, \\ \text{и} \quad \left| \frac{1+2a_i}{c_i} \right| &< 1, \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

где M -положительное число, то функции, определенные в виде (7) и (8), ограничены и ряды (4) сходятся абсолютно и равномерно.

Действительно, доказательство приведенной теоремы следует из оценок, полученных из соотношений (7) и (8) в следующем виде:

$$|P_{i,2k}(t)| \leq M \cdot \left(\frac{1+2a_i}{c_i} \right)^k, \quad |Q_{i,2k}(t)| \leq M \cdot \left(\frac{1+2a_i}{c_i} \right)^k,$$

$$|P_{i,2k+1}(t)| \leq M \cdot \left(\frac{1+2a_i}{c_i} \right)^{k+1} \frac{c_i}{F_i},$$

$$|Q_{i,2k+1}(t)| \leq M \cdot \left(\frac{1+2a_i}{c_i} \right)^k \frac{F_i}{c_i}, \quad i = 1, 2.$$

Проиллюстрируем вышесказанные результаты на следующем простом примере.

Пример. Рассмотрим систему (1) при $i = 1$, где $P_{1,0}(t)$ и $Q_{1,0}(t)$ данные в граничном условии (2) являются постоянными, т.е. $P_{1,0}(t) = P_{1,0}$, $Q_{1,0}(t) = Q_{1,0}$, где $P_{1,0}$, $Q_{1,0}$ – постоянные.

Тогда, если исходить из (6), решение этого примера, приведенного в (4) при $i = 1$, будет:

$$P_1(x, t) = P_{1,0} - \frac{2a_1}{F_1} Q_{1,0} \cdot x, \quad Q_1(x, t) = Q_{1,0}. \quad (9)$$

Таким образом, получаем явное представление решения граничной задачи (1), (2) при $i = 1$ и постоянство граничных условий (2). Аналогично, при $i = 2$, где из (3)

$$\bar{P}(t) = \bar{P}, \quad \bar{Q}(t) = \bar{Q} \quad \text{постоянные,}$$

$$\chi_1(\cdot, t) = P^2(l - 0, t), \quad \chi_2(\cdot, t) = -Q^2(l - 0, t), \quad \text{то}$$

$$P(l + 0, t) = P_{l+0}, \quad Q(l + 0, t) = Q_{l+0} \quad \text{постоянные и}$$

$$P_2(x, t) = P_{l+0} - \frac{2a_2}{F_2} Q_{l+0} \cdot x, \quad Q(x, t) = Q(l + 0), \quad (10)$$

где непосредственной постановкой (9) и (10) в уравнение (1) легко можно показать, что они являются аналитическим решением краевой задачи (1), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A., İlyasov M.K., İsmailov N.A., Qasimov Y.S., Mutallimov M.M., Jamalbekov M.A., Rajabov M.F. Mathematical simulation and control of gaslift process: from theory to practice/ Proceedings of BraNobel conference, Baku 22-23, 2012, pp.66-80.

ference, Baku 22-23, 2012, pp.66-80.

2. Шулов В.И. Технология и механика добычи нефти. М.: Недра, 1983.

3. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти. М.: Недра, 1986.

4. Eikrem, G.O., Aamo, O.N., Foss, B.A. Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas lift wells// SPE Production and Operations. V.21, N.2, 2006, pp.1-20.

5. Imsland, L.S., Eikrem, G.O., Foss, B.A. A state feedback controller for the class of nonlinear positive systems applied to stabilization of gas-lifted oil wells// Control Engineering Practice, N.3, 2006, pp.7-15.

6. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х. Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины// Докл. НАН Азербайджана, 2008, № 4, с.30-41.

7. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса// Прикладная механика, 2010, № 6, с.115-122.

8. Birkhoff G.D., a) On the asymptotic character of the solution of certain linear differential equations containing a parametr. Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908) 219-231. b) Boundary Value and expansion problems of ordinary linear differential equations. Amer. Math. Soc. 9.4(1908).

9. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Москва: ГИФМЛ, 1962, с.127.

10. Aliev, F.A., Djamalbekov, M.A., Ilyasov, M.Kh. Mathematical simulation and control of gas-lift// Journal of Computer and Systems Science International. V.50, N.1, 2011, pp.805-814.

11. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Temirbekova, N.L. External solution of the problem of the choice of optimum modes for gas-lift process// Appl.Comput. Math. V.11, N3, pp.348-357.

12. Aliev, F.A., Mutallimov, M.M., Ismailov, N.A., Racabov, M.F. An algorithm for constructing optimal controllers for gas-lift operation// Automation and Telemechanics, N8, 2012, pp.3-15.

13. Camponogara E., Plucenio A., Teixeira A.F., Campos S.R.V. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification control and optimization// Journal of Petroleum Science and Engineering 70, 2010, pp.157-167.

14. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Москва: Наука, 1967, с.375.

¹Факультет прикладной математики, БГУ

²Институт прикладной математики, БГУ

³Институт математики и механики НАН Азербайджана

**HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN
HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ****N.A.Əliyev, A.P.Quliyev, R.M.Tağıyev**

İdeal halda neft hasilatı prosesinin riyazi modelləşdirilməsi zamanı ikiölçülü hiperbolik tip tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsinə baxılır. Faza koordinatlarına nəzərən sonsuz sıra üsulu vasitəsi ilə bu sərhəd məsələsinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur. Nəticələr, sərhəd şərtində verilənlər sabit olan hal üçün sadə misal üzərində illüstrasiya olunur və axtarılan həll üçün analitik ifadə qurulur.

Açar sözlər: hiperbolik tip sistemlər, sərhəd məsələsi, sıralar üsulu, varlıq və yeganəlik, qazlift

**THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM
DESCRIBED BY THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS****N.A.Aliev, A.P.Guliev, R.M.Tagiyev**

The boundary problem is considered for the system of two-dimensional hyperbolic equations using in mathematical modeling of oil production process. The existence and uniqueness of the considered problem is proved by using of the infinite series method relative to phase coordinates. Results are illustrated on the concrete example, and when boundary conditions data are on the concrete example, and the analytical expression is given for the solution .

Keywords: systems of hyperbolic type, boundary problem, series method, the existence and uniqueness, gas lift