

УДК 519.8

Прикладная математика

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Р.Г.Гамидов, Н.К.Аллахвердиева

(Представлено академиком НАН Азербайджана Дж.Э.Аллахвердиевым)

В данной работе рассматривается задача назначения и распределения заказов между субъектами коллектива. Предлагается алгоритм принятия решения для организации деятельности коллектива на основе модели Марковица, известной как задача о максимизации полной прибыли.

Ключевые слова: коллективное принятие решения, вектор коллективной полезности, равновесная ситуация, оптимизация, множество Парето, оптимальное решение по Лоренцу

1. Постановка задачи

Назначение заказов между субъектами исполнителей, адекватных реалиям и потребностям социально-экономической жизни современного общества, нередко требует соблюдения справедливости относительно каждого, кто получает заказы и кто распределяет их.

В данной работе рассматривается ситуация следующего характера:

Имеется коллектив $K = \{1, 2, 3\}$ из трех участников (агентов). Агент 1 и агент 2 после того, как получают объемы заказов от агента 3 организуют свою деятельность на основе модели Марковица [1], которая известна как задача о максимизации полной прибыли. Объемы заказов представляются с помощью n -мерных векторов $x^{i0} = (x^{i10}, \dots, x^{in0})$, $x^{i10} \geq 0$, $r = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$, такие, что $x^{10} + x^{20} = a$, где a n -мерный вектор распределяемых заказов a_i , $i = 1, \dots, n$.

Производственная программа агента i , $x^i(t) = (x_1^{(i)}(t), \dots, x_n^{(i)}(t))$ определяется по модели Марковица из решения следующей задачи:

$$\frac{dx_j^{(i)}(t)}{dt} = \sum_{r=1}^n a_{jr} y_r^{(i)}(t), \quad 0 \leq y_r^{(i)}(t) \leq x_r^{(i)}(t),$$

$$x^{(i)}(0) = x^{i0}, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Полная прибыль, которую получает агент i от реализации производственной программы $x^{(i)}(t)$, является оптимальным значением целевой функции:

$$f_i(x^{(i)}(t)) = \sum_{j=1}^n \int_0^T ((x_j^{(i)}(t) - y_j^{(i)}(t))) dt \rightarrow \max \quad (2)$$

Это оптимальное значение обозначим через $J^{(i)}(x^{i0})$. Агент i передает α_i долю ($0 \leq \alpha_i \leq 1$) прибыли $J^{(i)}(x^{i0})$ агенту 3 взамен полученного от него объема заказов $x_j^{i0} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ и оставляет для себя прибыль в объеме $u^i(x^{i0}) = (1 - \alpha_i) J^{(i)}(x^{i0})$. В результате формируем вектор коллективной полезности коллектива K :

$$u(x^0) = u(x^{10}, x^{20}) = (u^1(x^{10}), u^2(x^{20}), u^3(x^{10}, x^{20})),$$

где

$$u^3(x^{10}, x^{20}) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} u^1(x^{10}) + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} u^2(x^{20})$$

Числа α_1, α_2 задаются заранее и согласуются между агентами i , $i = 1, 2, 3$.

Они могут быть уточнены и в процессе принятия решения.

Рассмотрим множество:

$$U = \{u(x^0) | x^{10} + x^{20} = a, x^{10} \geq 0, x^{20} \geq 0\}$$

Множество U принимаем как множество векторов коллективной полезности. Решения $x^1(t)$ и $x^2(t)$, $0 \leq t \leq T$, которые считаются “хорошими” решениями для каждого агента i , $i = 1, 2, 3$ и коллектива в целом определяют “хорошее” решение $u^* \in U$ на множестве векторов коллективной полезности.

Задача состоит в организации процедуры с целью построения u^* .

2. Схема организации принятия решения

Процесс определения u^* , следуя [2], организуется в двух этапах. На первом этапе определяем u_3^* решения $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$. А на втором этапе определяем координаты u_1^* и u_2^* решения u^* .

Описание первого этапа.

Через $\bar{u} = u_1 + u_2$, $(u_1, u_2, u_3) \in U$ обозначим уровень общего интереса коллектива $\{1, 2\}$, который состоит из исполнителей заказов. Тогда первое требование, которое налагаем на u^* , состоит из следующего: коллективное решение должно быть компромиссным решением задачи

$$\begin{aligned} \bar{u} = u_1 + u_2 &\rightarrow \max, \\ u_3 &\rightarrow \max, \\ \text{при } (u_1, u_2, u_3) &\in U. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи (3) мы принимаем на Паретовой границе задачи на основе диалогового алгоритма из [3]. Иллюстрация схемы такого типа алгоритма на числовом примере приводится в [2].

Описание второго этапа.

После того, как удовлетворяем максимальный интерес агента 3 и коллектива $\{1, 2\}$ (пусть это выражается вектором $(\bar{u}^*, u_3^*)$), нам следует определить координаты u_1^*, u_2^* вектора u^* . Для этого налагаем второе требование на u^* : Агент 3 не может ограничивать коллектив $\{1, 2\}$ при выборе наилучшего для себя коллективного

решения $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, если $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3^*) = u^*$. Отсюда следует, что коллектив $\{1, 2\}$ может выбирать решение $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, как компромиссное решение задачи

$u_1 \rightarrow \max, u_2 \rightarrow \max$, $(u_1, u_2, u_3) \in U$ или задачи

$$\begin{aligned} J^{(1)}(x^{10}) &\rightarrow \max, \\ J^{(2)}(x^{20}) &\rightarrow \max \\ x^{10} + x^{20} &= a, x^{10}, x^{20} \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (3) и задача (4) обладают общим недостатком. Она связана отсутствием аналитического представления целевых функций, которых максимизируются. Эти функции задаются алгоритмическим образом. Как в конечномерном случае [2], так и здесь, специфика ограничения рассматриваемых задач позволяет преодолеть эти трудности.

3. Аналитическое представление

$u_i, i = 1, 2, 3$.

Задачу (1)-(2) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} y_r^{(i)}(t) - \sum_{l=1}^n a_{rl}^{(i)} \int y_l^{(i)}(\tau) d\tau &\leq x_r^{i0}, \\ y_r^{(i)}(t) &\geq 0, \quad r = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T], \\ T \sum_{l=1}^n x_l^{i0} + \sum_{l=1}^n \int_0^T (\sum_{r=1}^n a_{rl}^{(i)} (T-t) - 1) y_l^{(i)}(t) dt &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} c^i(t) &= \sum_{r=1}^n a_{rl}^{(i)} (T-t) - 1, c^0 = (1, \dots, 1), \\ H^{(i)} &= \|a_{rl}^{(i)}\|_{l=1, n}^{r=1, n}, F^{(i)}[y^{(i)}(t)] = \int_0^t H^{(i)} y(\tau) d\tau, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда в новых обозначениях задача (1)-(2) принимает вид:

$$\begin{aligned} y^{(i)} - F^{(i)}[y^{(i)}(t)] &\leq x^{i0}, \quad y^{(i)}(t) \geq 0, \\ J^{(i)}(x^{i0}) &= \int c^{(i)}(t) dt + T(c^0, x^{i0}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

Следуя [4] и [5] максимальное значение $J^{(i)}(x^{i0})$ определяем как предел

$$J^{(i)}(x^{i0}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{i0}, \Psi^{ik}) + T(c^0, x^{i0}) = (x^{i0}, \Psi^{i*}) + T(c^0, x^{i0}) = (Tc^0 + \Psi^{i*}, x^{i0}), \quad (5)$$

где $\Psi^{i0} = 0$,

$$\Psi^{i,k+1} = \max \{0, c^{(i)} + F'^{(i)} \Psi^{ik}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

‘ ‘ ‘ в F' означает знак транспонирования.

Существование предела Ψ^{i*} следует из [4], а справедливость равенства (5) следует из обобщенной теоремы двойственности [1,5] для динамических задач линейного программирования.

4. Случай, когда число исполнителей заказов $k > 2$

Если при выполнении заказов по модели Марковица участвуют не два, а больше участников, то первый этап процесса принятия решения остается в силе и решается задача

$$u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^{k-1} u_i \rightarrow \max \\ (u_1, \dots, u_{k-1}, u_k) \in U$$

Второй этап решения в случае $k > 2$ усложняется и требует анализировать ситуацию, которая выражается следующим образом:

$$(J^1(x^{10}), \dots, J^{k-1}(x^{k-1,0})) \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^{k-1} x^{i,0} = a,$$

т.е. требуется выбирать коллективное решение из множества

$$\bar{U} = \{(u_1, \dots, u_{k-1}) | u_i = J^i(x^{i0}), i = 1, \dots, k-1\}$$

Здесь мы можем использовать возможность, которую представляет нам теория выбора коллективного решения [6]. Например, если мы хотим организовать выбор с помощью коллективного порядка R , который сокращает неравенства, то выбор достаточно произвести во множестве оптимальных по Лоренцу решений, являющегося подмножеством множества Парето решений. В этом случае, иногда успешно может быть применен метод параметризации множества Парето, предложенный в [7] с

целью поиска окончательного решения в форме диалогового алгоритма.

5. Обобщение

Задачу (1) - (2) можно считать как содержательный пример для следующей более общей задачи:

$$x(t) - F[x(t)] \leq b(t), \quad x(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ \int_0^T c(t)x(t)dt \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$\text{где} \quad F[x(t)] = A(t)x(t) + \int_0^t H(t, \tau)x(\tau)d\tau, \\ b(t), x(t) \in L_2[0, T], \quad b(t) \geq 0, x(t) \geq 0, \\ A(t) \geq 0, H(t, \tau) \geq 0 \\ \int_0^T \int_0^t |H(t, \tau)|^2 \tau d\tau dt < \infty.$$

С помощью (6) моделируются различные важные практические задачи экономического и технического характера [5]. Проведенная нами процедура организации процесса принятия решения может быть успешно применена и в этих задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М.: ИЛ, 1962.
2. Гамидов Р.Г., Аллахвердиева Н.К., Гамидов А.Р. Об одной задаче распределения ресурсов // Вестник БГУ, серия физ-мат. наук, 2012, №2, с.70-78.
3. Hamidov R.H. One bicriterian dynamic linear program and its solution/ The international conference on problems of cybernetics and informatics, Baku, 2006, p.7-11.
4. Беленький В.З. О задачах математического программирования, обладающих минимальной точкой// Доклады АН СССР, 1968, т.183, №1.
5. Мееров М.В., Берцанский Я.М. Решение динамических задач оптимизации для линейных много-связных систем. Препринт. М.: Институт проблем управления, 1975.
6. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
7. Гамидов Р.Г., Фарбер М.Ш. О принятии решения в задачах многокритериальной оптимизации// Известия АН АзССР, сер. физ-техн. и матем. наук, 1978, №3, с. 11-16.

Бакинский государственный университет

QƏRAR QƏBUL ETMƏ PROSESİNİN TƏŞKİLİNƏ BİR YANAŞMA HAQQINDA**R.H. Həmidov, N.K. Allahverdiyeva**

Təqdim olunan işdə sifarişlərin kollektivin subyektləri arasında təyinatı və bölüşdürülməsi məsələsinə baxılmışdır. Tam gəlirin maksimallaşdırılması məsələsi kimi tanınan Markovits modeli əsasında kollektivin fəaliyyətinin təşkili üçün qərar qəbul etmə alqoritmi verilmişdir.

Açar sözlər: kollektiv qərar qəbul etmə, kollektiv faydalılıq vektoru, optimallaşdırma, Pareto və Sleytr çoxluqları, tarazlıq vəziyyəti

ABOUT ONE APPROACH TO THE ORGANIZATION OF THE PROCESS OF DECISION-MAKING**R.H. Hamidov, N.K. Allahverdiyeva**

In this paper we consider the problem of assignment and allocation of orders between subjects of collective. Algorithm for decision-making to organize collective action is proposed, and it's based on the Markowitz model, which is known as the problem of maximizing of total profit.

Keywords: collective decision-making, collective utility vector, equilibrium situation, optimization, set of Pareto, optimal solutions by Lorentz