

УДК 530.145

Квантовая механика

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Р.Г.Агаева

(Представлено академиком НАН Азербайджана Ф.М.Гашимзаде)

Построены интегралы движения для систем, являющихся суперсимметричным обобщением нестационарного одномерного гармонического осциллятора и движения заряженной частицы в переменном квантующем магнитном поле.

Ключевые слова: квантовая пленка, квантовая проволока, статистическая сила, термомагнитный ток

В настоящее время суперсимметрия находит широкое применение в различных областях физики: в ядерной физике, физике элементарных частиц, в статистической физике, в теории конденсированного состояния и в теории гравитации [1]. Этому в немалой степени способствовало развитие суперсимметричной квантовой механики [2].

Известно, что система обладает суперсимметрией, если существуют операторы, генерирующие базе-ферми преобразования и являющиеся интегралами движения. Поэтому в суперсимметричной квантовой механике очень важной является задача о построении интегралов движения.

Цель настоящей работы – построить интегралы движения для систем, являющихся суперсимметричным обобщением нестационарного одномерного гармонического осциллятора и движения заряженной частицы в переменном квантующем магнитном поле. В обычной квантовой механике интегралы движения для таких систем хорошо известны [3]. В связи с поставленной задачей следует отметить работу Додд-нова и Манько [4], в которой рассмотрены интегралы движения для нестационарных квадратичных ферми-базе-систем, но в самых общих чертах.

При построении интегралов движения для нестационарных суперсимметричных

систем будем требовать, следуя [3], коммутативности интегралов движения с операторами $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s\right)$, где $\hat{H}_s$ – гамильтониан соответствующей суперсимметричной задачи.

Одномерный суперсимметричный гамильтониан нестационарного гармонического осциллятора имеет вид [2]

$$\hat{H}_s = \hat{H} - \frac{\hbar\omega(t)}{2} [\hat{\psi}^+, \hat{\psi}^-], \quad (1)$$

где

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)\hat{x}^2}{2}, \quad (2)$$

$\hat{x}$ – бозонный оператор, $\hat{p}$ – канонически сопряженная ему переменная, $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$, $\hat{\psi}^\pm$ – два фермионных оператора, удовлетворяющих условиям $\{\hat{\psi}^+, \hat{\psi}^-\} = 1$, $\hat{\psi}^{-2} = \hat{\psi}^{+2} = 0$. Для этих фермионных операторов обычно выбирают следующее матричное представление

$$\hat{\psi}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В этом представлении

$$\hat{H}_s = \begin{pmatrix} \hat{H} + \frac{\hbar\omega(t)}{2} & 0 \\ 0 & \hat{H} - \frac{\hbar\omega(t)}{2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Шредингера

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s \right) \varphi = 0, \quad (5)$$

можно записать в виде вектора

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^f \\ \varphi^b \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь и далее индекс "f" относится к фермионному состоянию, а "b" – к бозонному.

Введем суперзаряды

$$\hat{Q}^\pm = \hat{\psi}^\pm \hat{A}^\pm \exp\left(\pm i \int^t \omega(t) dt\right), \quad (7)$$

где оператор

$$\hat{A}^- = \frac{i}{\sqrt{2\hbar}} \left[\varepsilon(t) \frac{\hat{p}}{\sqrt{m}} - \dot{\varepsilon}(t) x \sqrt{m} \right] \quad (8)$$

и эрмитово сопряженный оператор $\hat{A}^+$ являются интегралами движения соответствующей несуперсимметричной задачи, т.е.

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}, \hat{A}^\pm \right] = 0, \quad (9)$$

а функция $\varepsilon(t)$ есть решение для классического гармонического осциллятора $\ddot{\varepsilon} + \omega^2(t)\varepsilon = 0$ [3].

Легко проверить, что

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s, \hat{Q}^\pm \right] = 0, \quad (10)$$

и потому эти суперзаряды являются интегралами движения. Кроме того,

$$\hat{Q}^{-2} = \hat{Q}^{+2} = 0. \quad (11)$$

Из неэрмитовых операторов $\hat{Q}^-$ и $\hat{Q}^+$ составим эрмитовый оператор

$$\hat{K} = \{\hat{Q}^-, \hat{Q}^+\} = \begin{pmatrix} \hat{A}^- \hat{A}^+ & 0 \\ 0 & \hat{A}^+ \hat{A}^- \end{pmatrix} \quad (12)$$

- интеграл движения рассматриваемой суперсимметричной задачи. Отсюда следует, что решения φ уравнения Шредингера (5) являются собственными функциями оператора $\hat{K}$,

$$[\hat{K}, \hat{Q}^\pm] = [\hat{K}, \hat{Q}^\pm] = 0. \quad (13)$$

Из выражения (12) видно, что собственные функции операторов $\hat{A}^- \hat{A}^+$ и $\hat{A}^+ \hat{A}^-$ выражены, ибо [3]

$$[\hat{A}^-, \hat{A}^+] = 1, \quad (14)$$

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- |n, t\rangle = n |n, t\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

где $|n, t\rangle$ – решение нестационарного уравнения Шредингера для гармонического осциллятора с несуперсимметричным гамильтонианом $\hat{H}$. Тогда для собственных функций оператора $\hat{K}$ имеем

$$\varphi = \varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^f \\ \varphi_n^b \end{pmatrix},$$

$$\varphi_n^f = \exp\left(-\frac{i}{2} \int^t \omega(t) dt\right) |n-1, t\rangle, \quad (16)$$

$$\varphi_n^b = \exp\left(\frac{i}{2} \int^t \omega(t) dt\right) |n, t\rangle,$$

и $\hat{K} \varphi_n = n \varphi_n. \quad (17)$

Суперсимметрия имеет место, если вакуумное состояние φ_0 не изменяется под действием оператора $\hat{Q}^\pm$

$$\hat{Q}^- \varphi_0 = \hat{Q}^+ \varphi_0 = 0. \quad (18)$$

Состояние φ_0 определим, исходя из формулы (18)

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^b \end{pmatrix}, \quad \varphi_0^b = \exp\left(\frac{i}{2} \int \omega(t) dt\right) |0, t>, \quad (19)$$

где $|0, t>$ – вакуумное состояние системы, описываемой гамильтонианом $\hat{H}$, дается выражением [3]:

$$|0, t> = \sqrt{\frac{m}{\pi \hbar \varepsilon^2}} \exp(i \dot{\varepsilon} x^2 m / 2 \hbar). \quad (20)$$

Функция φ_0 удовлетворяет уравнению Шредингера (5), уравнению (18) и условию нормировки.

Таким образом, есть одно нормированное вакуумное состояние, состоящее из простого бозе-состояния, а все другие состояния системы являются спаренными – состоят из одного бозе – и одного ферми-состояния. Эта ситуация аналогична стационарному случаю [2].

Нетрудно убедиться в том, что при суперсимметрии интегралы движения $\hat{Q}^\pm$ преобразуют фермионное и бозонное состояния, входящие в одни и те же пары, друг в друга:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^- \varphi_n &= \hat{Q}^- \varphi_n^b = \sqrt{n} \varphi_n^f, \\ \hat{Q}^+ \varphi_n &= \hat{Q}^+ \varphi_n^f = \sqrt{n} \varphi_n^b. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда следует, что два независимых интеграла движения $\hat{Q}^+$ и $\hat{Q}^-$ рассматриваемой одномерной системы действительно являются суперзарядами.

Перейдем теперь к задаче о движении

заряженной частицы в нестационарном магнитном поле, описываемой гамильтонианом

$$\hat{H}_H = \frac{1}{2m} [(\hat{p}_x + m\omega(t)\hat{y})^2 + (\hat{p}_y - m\omega(t)\hat{x})^2] \quad (22)$$

Здесь ось z направлена вдоль магнитного поля $\vec{H}$. Движение вдоль z тривиально, и потому им пренебрегаем.

Если учесть в $\hat{H}_H$ член $\mu \hat{\sigma}_z \vec{H} = -[\hat{\psi}^+, \hat{\psi}^-] \hbar \omega(t) / 2$, зависящий от спина, то получим суперсимметричное обобщение рассматриваемой задачи [4]:

$$\hat{H}_{H_s} = \hat{H}_H - \frac{\hbar \omega(t)}{2} [\hat{\psi}^+, \hat{\psi}^-] \quad (23)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что операторы

$$\begin{aligned} \hat{Q}_H^\pm &= \hat{\psi}^\pm \hat{A}_H^\pm \exp\left(\pm i \int \omega(t) dt\right), \\ \hat{\theta}_H^\pm &= \hat{\psi}^\pm \hat{B}_H^\pm \exp\left(\pm i \int \omega(t) dt\right) \end{aligned} \quad (24)$$

коммутируют с оператором $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_{H_s}\right)$, т.е. являются интегралами движения. В формуле (24)

$$\begin{aligned} \hat{A}_H^\pm &= \frac{1}{2\sqrt{\hbar m}} \exp\left(i \int \omega(t) dt\right) [\varepsilon(t)(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) - im\dot{\varepsilon}(t)(\hat{y} - i\hat{x})], \\ \hat{B}_H^\pm &= \frac{1}{2\sqrt{\hbar m}} \exp\left(i \int \omega(t) dt\right) [\varepsilon(t)(\hat{p}_y + i\hat{p}_x) - im\dot{\varepsilon}(t)(\hat{x} - i\hat{y})], \end{aligned} \quad (25)$$

где $\hat{A}_H^\pm$, $\hat{B}_H^\pm$ – интегралы движения соответствующей несуперсимметричной задачи [3], удовлетворяющие коммутационным соотношениям для бозе-операторов.

Операторы $\hat{Q}_H^\pm$ являются суперзарядами. Действительно, построим эрмитовый оператор

$$\hat{K}_H = \hat{Q}_H^+ \hat{Q}_H^- + \hat{Q}_H^- \hat{Q}_H^+, \quad (26)$$

являющийся интегралом движения. Оператор $\hat{K}_H$ удовлетворяет, как легко проверить, следующим свойствам:

$$\begin{aligned} [\hat{K}_H, \hat{Q}_H^\pm] &= [\hat{K}_H, \hat{\theta}_H^\pm] = 0 \\ \hat{Q}_H^{\pm 2} &= \hat{\theta}_H^{\pm 2} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Очевидно, что решения φ_H нестационарного уравнения Шредингера с $\hat{H}_{H_s}$ будут одновременно и собственными функциями оператора $\hat{K}_H$. Решение задачи на собственные значения оператора $\hat{K}_H$ дает

$$\varphi_H = \begin{pmatrix} \varphi_H^f = \exp\left(-\frac{i}{2} \int^t \omega(t) dt\right) \cdot |n_1 - 1, n_2, t\rangle \\ \varphi_H^b = \exp\left(\frac{i}{2} \int^t \omega(t) dt\right) \cdot |n_1, n_2, t\rangle \end{pmatrix} \quad (28)$$

Здесь состояния $|n_1, n_2, t\rangle$ – решения нестационарного уравнения Шредингера с $\hat{H}_H$ и уравнений

$$\begin{aligned} \hat{A}_H^- \hat{A}_H^+ |n_1, n_2, t\rangle &= n_1 |n_1, n_2, t\rangle, \\ \hat{B}_H^- \hat{B}_H^+ |n_1, n_2, t\rangle &= n_2 |n_1, n_2, t\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Для наличия суперсимметрии необходимо выполнение равенства, аналогичного (18):

$$\hat{Q}_H^- \varphi_{0H} = \hat{Q}_H^\pm \varphi_{0H} = 0. \quad (30)$$

Нетрудно показать, что существуют нормированные вакуумные состояния φ_{0H}

$$\begin{aligned} \varphi_{0H} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{0H}^b \end{pmatrix}, \quad \varphi_{0H}^b = \\ &= \exp\left(\frac{i}{2} \int^t \omega(t) dt\right) |0, n_2, t\rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

где $|0, n_2, t\rangle$ [3] вакуумные состояния соответствующей несуперсимметричной задачи:

$$\begin{aligned} |0, n_2, t\rangle &= \left(\frac{m}{\pi \hbar \varepsilon^2 n_2!}\right)^{1/2} \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}\right)^{n_2/2} \times \\ &\times \left[\sqrt{\frac{m}{\hbar |\varepsilon|^2}} (x + iy) \exp\left(i \int^t \omega(t) dt\right) \right]^{n_2} \times \\ &\times \exp[i \dot{\varepsilon} m (x^2 + y^2) / 2 \hbar \varepsilon] \end{aligned} \quad (32)$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \hat{Q}_H^- \varphi_H &= \hat{Q}_H^- \varphi_H^b = \sqrt{n_1} \varphi_H^f \\ \hat{Q}_H^+ \varphi_H &= \hat{Q}_H^+ \varphi_H^f = \sqrt{n_2} \varphi_H^b, \end{aligned} \quad (33)$$

что кроме вакуумных состояний, являющихся простыми бозе-состояниями, все состояния системы представляют собой совокупность бозе-фермионных пар.

Таким образом, для рассматриваемой двумерной суперсимметричной задачи построены четыре независимых интеграла движения, два из которых являются суперзарядами-генераторами суперсимметричных преобразований, переводящих фермионные и бозонные состояния одной и той же пары друг в друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Supersymmetry in Physics. – Phys., 1985, D15, p.1.
2. Cooper F., Freedman B. - Ann. Phys., 1983, v. 146, p.262.
3. Малькин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
4. Додонов В.В., Манько В.И. – Тр. ФИАН, 1983, т.152, с.145.

Институт физики им. Г.М. Абдуллаева
НАН Азербайджана

**SUPERSİMMETRİK KVANT MEXANİKASI
VƏ HƏRƏKƏT İNTEQRALLARI****R.Q.Ağayeva**

Qeyri-stasionar birölçülü harmonik ostillyatorun və dəyişən kvantlayıcı maqnit sahəsində hərəkət edən yüklü zərrəciyin supersimmetrik ümumiləşdirilməsi olan sistemlər üçün hərəkət inteqralları qurulub.

**SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS
AND INTEGRALS OF MOTION****R.G.Aghayeva**

Integrals of motion for the systems being supersymmetric generalization of non-stationary one-dimensional harmonic oscillator and of motion of a charged particle in a non-stationary quantizing magnetic field are constructed.