

УДК 517.977, 58+622.279.23

Информатика

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗЛИФТНОМ ПРОЦЕССЕ

Академик НАН Азербайджана **Ф.А.Алиев, Н.А.Исмаилов**

Формулируется математическая задача определения коэффициента гидравлического сопротивления при движении газожидкостной смеси (ГЖС) в подъемнике. Задача сводится к минимизации нелинейного функционала, составленного на основе статистических данных (истории) скважины. На основе методов наискорейшего спуска (градиентный) и ортогонализации Грама-Шмидта находится коэффициент гидравлического сопротивления. Результаты иллюстрируются примером из практики.

Ключевые слова: газлифт, газожидкостная смесь, алгоритм Грама-Шмидта

1. Введение

Движение объекта, описываемое системой нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которая после усреднения по времени [1] приводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Q} = \frac{2a\rho F Q^2}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, \quad Q(0) = Q_0, \quad (1)$$

где $2a = \frac{g}{\omega_e} + \frac{\lambda_c \omega_e}{2D}$, g – ускорение свободного падения, λ_c – гидравлическое сопротивление, D – внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства, ω_e – скорость движения газа и ГЖС, которую можно принять постоянной и равной своему (на отрезке трубы высотой $dx = \omega_e dt$) среднему значению и не зависящему от времени, $Q = \rho \omega_e F$ – массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, F – площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб в кольцевом пространстве и подъемнике.

В уравнение (1) входит коэффициент λ_c (гидравлическое сопротивление), который влияет на правильность расчета Q в кольце-

вом пространстве и подъемнике.

При эксплуатации газлифтных скважин (при транспортировке жидкостей, газов, воздуха и паров в трубопроводах) для расчета движения газа в кольцевом пространстве и ГЖС в насосно-компрессорных трубах необходимы точные гидравлические расчеты [2] (т.е. определение коэффициента гидравлического сопротивления).

Принимая за исходные данные $a, \rho, F, c, \omega_e, \lambda_c, D$ решается обыкновенное дифференциальное уравнение для определения перераспределения расхода газа по глубине газлифтной скважины в кольцевом пространстве, а также ГЖС в подъемнике (насосно-компрессорных трубах).

Явное решение исходной задачи Коши (1) будет

$$Q(x) = - \left(a\rho Fx + \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right) - \sqrt{\left(a\rho Fx - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2 \rho^2 F^2} \quad (2)$$

Предположим, что значения решения (выходные данные) исходной задачи принимаются за входные данные, а одно из входных данных исходной задачи (и в нашем случае коэффициент гидравлического сопро-

тивления λ_c) принимается за неизвестное (т.е. предлагается обратная задача) и дается метод решения (затем и алгоритм).

2. Постановка задачи

При постановке задачи за исходные данные задачи принимаются статистические данные (истории скважины) газлифтных скважин. Таким образом, опираясь на данные из истории скважины и решая обратную задачу, находим исходные данные (т.е. λ_c), которые входят в уравнение (1).

Итак, предположим, что из истории газлифтной скважины имеются статистические данные $Q_i^{st}, i = \overline{1, n}$. Q_i^{st} – объем ГЖС на выходе газлифтной скважины, n – число измерений на выходе той же скважины.

Таким образом, отыскание коэффициентов гидравлического сопротивления λ_c сводится к отысканию минимума целевой квадратичной функции

$$f(\lambda_c) = \sum_{i=1}^n (Q_i^{st} - Q_i(2l))^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

здесь $Q(2l)$ определяется из (2). Учитывая (2) в (3) функционал $f(\lambda_c)$ принимает вид

$$f(\lambda_c) = \sum_{i=1}^n \left[Q_i^{st} - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} + \left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l + \sqrt{\left(\left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2 \rho^2 F^2} \right]^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

Таким образом, для градиента целевой функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda_c)}{\partial \lambda_c} = & 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\omega_c}{4D} \rho F 2l + \frac{\left(\left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right) \frac{\omega_c}{4D} \rho F 2l}{\sqrt{\left(\left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2 \rho^2 F^2}} \right] \times \\ & \times \left[Q_i^{st} - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} + \left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left(\left(\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D} \omega_c \right) \rho F 2l - \frac{c^2 \rho^2 F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2 \rho^2 F^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь рассматривается вопрос о том, как решить задачу (4) с помощью алгорит-

мов, использующих первую производную $f(\lambda_c)$. Сначала описывается поиск наискорейшего спуска, опирающийся на сопряженный направленный [3-5] (путем использования одномерного поиска золотого сечения).

3. Вычислительный алгоритм

Кратко изложим стратегию метода оптимизации без ограничений; т.е. в вычислительном аспекте здесь используются только первые производные (5). Переход из точки $\lambda_c^{(k)}$ в точку $\lambda_c^{(k+1)}$ описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \lambda_c^{(k+1)} &= \lambda_c^{(k)} - \Delta \lambda_c^{(k)} = \lambda_c^{(k)} - \gamma^{(k)} \eta^{(k)} \nabla f(\lambda_c^{(k)}) = \\ &= \lambda_c^{(k)} - \gamma^{(k)} \eta^{*(k)} \nabla f(\lambda_c^{(k)}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta \lambda_c^{(k)}$ – вектор перехода из точки $\lambda_c^{(k)}$ в точку $\lambda_c^{(k+1)}$, $\eta^{(k)}$ – единичный вектор в направлении $\Delta \lambda_c^{(k)}$, который определяется из следующих рекуррентных соотношений [3]:

$$\begin{aligned} \eta^{(k+1)} &= \eta^{(k)} + V^{(k)} - W^{(k)}; \\ V^{(k)} &= \frac{\Delta \lambda_c^{(k)} (\Delta \lambda_c^{(k)})^T}{(\Delta \lambda_c^{(k)})^T \Delta g(\lambda_c^{(k)})}; \\ W^{(k)} &= \frac{\eta^{(k)} \Delta g(\lambda_c^{(k)}) (\Delta g(\lambda_c^{(k)}))^T (\eta^{(k)})^T}{(\Delta g(\lambda_c^{(k)}))^T \eta^{(k)} \Delta g(\lambda_c^{(k)})}; \\ \Delta \lambda_c^{(k)} &= \lambda_c^{(k+1)} - \lambda_c^{(k)}, \\ \Delta g(\lambda_c^{(k)}) &= \frac{\partial f(\lambda_c^{(k+1)})}{\partial \lambda_c^{(k+1)}} - \frac{\partial f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_c^{(k)}}. \end{aligned}$$

T – знак транспонирования.

Исходная $\eta^{(0)}$ выбирается в виде единичной матрицы или же любого вектора в направлении $\Delta \lambda_c$.

$\gamma^{(k)}$, $\gamma^{*(k)}$ – скаляры, определяемые методом одномерного поиска (золотого сечения).

Решение задачи (3) начинается с вы-

бора начальной точки $\lambda_c^{(0)}$ (она является произвольной), затем выполняется итерационный процесс (6). Если выполняется условие $\left\| \frac{\partial f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_c^{(k)}} \right\| \leq \varepsilon$ (ε – достаточно малое положительное число), $\lambda_c^{(k)}$ принимается за минимальную точку, т.е. $\lambda_c^{(k)} = \lambda_c^{*(k)}$ и $f(\lambda_c^{*(k)})$ есть минимум функции (5).

В качестве неградиентного метода предлагается алгоритм, опирающийся на ортогонализацию градиентных направлений на основе процедуры Грама-Шмидта.

Шаг 1. Используя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта вычисляются векторы ω_i^j , $i = j, j+1, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, n^2$, так, чтобы множество векторов

$$\left(\frac{\partial f(\lambda_c^1)}{\partial \lambda_c^1}, \frac{\partial f(\lambda_c^2)}{\partial \lambda_c^2}, \dots, \frac{\partial f(\lambda_c^i)}{\partial \lambda_c^i}, \omega_i^j, \omega_{i+1}^j, \dots, \omega_n^j \right)$$

в R^n образовали ортогональный базис.

Алгоритм ортогонализации, при котором по линейно независимой системе $a_1, a_2, \dots, a_k$ строится ортогональная система $b_1, b_2, \dots, b_k$ такая, что каждый вектор b_i линейно выражается через $a_1, a_2, \dots, a_i$, то есть матрицы перехода $\{a_i\}$ к $\{b_i\}$ – верхняя треугольная матрицы. При этом можно добиться того, чтобы системы $\{b_i\}$ были ортонормированными, где диагональные элементы матрицы перехода были положительными; этими условиями система $\{b_i\}$ и матрица перехода определяются однозначно.

Алгоритм полагает $b_1 = a_1$, и, если уже построены векторы $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$, то

$$b_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_i, b_j \rangle} b_j,$$

где $\langle \rangle$ знак скалярного произведения векторов.

Шаг 2. Для ортогонализации градиентных направлений вычисляем v_i^j в виде

$$v_i^j = \frac{f(\lambda_c + \delta \omega_i^j) - f(\lambda_c - \delta \omega_i^j)}{2\delta},$$

$$i = j, j+1, \dots, n,$$

где $\delta > 0$ – некоторый малый параметр.

Шаг 3. Ортогональные градиентные направления выбираются в виде

$$l_j = \sum_{i=j}^n v_i^j \omega_i^j.$$

Заменяя в (6) $\Delta f(\lambda_c^{(k)})$ на l_j неградиентная итерационная процедура минимизации примет вид:

$$\lambda_c^{(k+1)} = \lambda_c^{(k)} - \alpha^{*(k)} l_k,$$

где $\alpha^{*(k)}$ – скаляр, который определяется методом золотого сечения в одномерном поиске при нахождении функции (4).

Проиллюстрируем применение вышеизложенного метода на примере следующей задачи: на основе заранее известных Q_i^{st} (соответствующего статистическим данным из конкретной газлифтной скважины) строится квадратичный функционал (3), который требуется минимизировать. [7-9]

В соответствии с изложенным выше алгоритмом получен $\lambda_c^* = 0,2312$ путем минимизации $f(\lambda_c)$ по λ_c . Здесь $\partial f(\lambda_c^*) / \partial \lambda_c \approx 3,23 \cdot 10^{-8}$. Значение функции $f(\lambda_c^*) \approx 5,17 \cdot 10^{-2}$. При этом в построенной тестовой задаче было известно, что $\lambda_c = 0,23$, т.е. совпадение до четырех значимых цифр при восьми итерациях. Если увеличить число итераций, например 40 итераций, то λ_c совпадает с λ_c^* до восьми значимых цифр, т.е. $\lambda_c^* \approx 0,230001$. Эта точность, которая получена путем предложенной процедуры вычисления коэффициента гидравлического сопротивления (одна из характеристик изучаемого процесса) позволяет

утверждать, что модель адекватна, т.е. дает практически приемлемые прогнозы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса// Прикладная механика, т. 46, № 6, 2010, с. 113-123.
2. Альтицуль Д.М. Гидравлические сопротивления. М.: Недра 1970, с. 216.
3. Himmeblau D.M. Applied Nonlinear Programming. New York: Crow-Hill Book Company, 1972, p.536.
4. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае// Доклады НАН Азербайджана, 2010, №6, с. 6-14.
5. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для нелинейных систем// Мехатроника, автоматизация управления, М., 2012, №6 (135), с.2-6.
6. Fletcher R. and Leyffer S.L. Nonlinear Programming without a penalty function// Dundee Numerical Analysis Report, NA/171, 1996, p.32.
7. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Исмаилов Н.А., Раджабов М.Ф. Алгоритм построения оптимальных регуляторов при газлифтной эксплуатации// Автоматика и телемеханика, 2012, №8, с. 3-15.
8. Apostolyuk A.S., Larin V. B. On linear stationary system at regular and irregular measurements// Appl. Comp. Math, V.8, № 1, 2009, p. 42-53.
9. Apostolyuk A.S., Larin V. B. Updating of Linear Stationary Dynamic system Parametres// Appl. Comp. Math. V.10, 2011, № 3, p. 402-408.

Институт прикладной математики при БГУ

QAZLIFT PROSESİNDƏ HİDRAVLİK MÜQAVİMƏTİN ƏMSALLARININ HESABLANMA ALQORİTMİ

F.Ə.Əliyev, N.A.İsmayilov

Qaldırıcı maye-qaz qarışığının hərəkəti zamanı hidravlik müqavimətin əmsallarının təyini üçün riyazi məsələ qoyulub. Quyunun statistik məlumatları əsasında məsələ qeyri xətti funksionalın minimallaşdırılması məsələsinə gətirilir. Hidravlik müqavimətlərin əmsalları gradient metodu və Qram-Şmidtin ortoqonallaşdırma metodu vasitəsi ilə tapılır. Nəticələr praktikadan gələn misallarla yoxlanılır.

Açar sözlər: qazlift, qaz-maye qarışığı, Qram-Şmidt alqoritm

ALGORITHM OF CALCULATING OF HYDRAULIC RESISTANCE'S COEFFICIENT IN GAS-LIFT PROCESS

F.A.Aliev, N.A.Ismailov

The mathematical problem of determining of the hydraulic resistance's coefficient during moving of the gas-liquid mixture (GLM) in lifts is formulated. The task is to minimize the non-linear functional based on statistic data (history) of the well. Based on the methods of steepest descent (gradient) and Gram-Schmidt's orthogonalization the coefficient of hydraulic resistance is found. The results are illustrated by an example from practice.

Keywords: gaslift, gas-liquid mixture, Gram-Schmidt's algorithm