

УДК 517.977

Математика

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА РОССЕРА

С.Ш.Кадырова, К.Б.Мансимов

(Представлено академиком НАН Азербайджана Т.А.Алиевым)

Рассматривается линейная дискретная 2-D система Россера с краевыми условиями. Получено представление решения.

1. Введение

Многие химико-технологические процессы описываются системой гиперболических уравнений первого порядка с краевыми условиями типа Гурса (см. напр. [1, 2, 3]). Разностные аналоги подобных систем уравнений называются системами уравнений типа Россера (см. напр. [4, 5]). Заметим, что система уравнений Россера также моделирует многие реальные процессы (см. напр. [4, 5]).

Поэтому исследования задач оптимального управления, описываемые системами типа Россера, имеют большое теоретическое и прикладное значение. При исследовании различных линейных задач оптимального управления очень важную роль играют формулы для представления решений уравнений моделирующие данный процесс (см. напр. [6, с. 16-53]). Исходя из этого, данная работа посвящена нахождению представления одной линейной системы типа Россера.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= A(t, x)z(t, x) + B(t, x)y(t, x) + f(t, x), \\ t &= t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} y(t, x+1) &= C(t, x)z(t, x) + D(t, x)y(t, x) + g(t, x), \\ t &= t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1 \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь (z, y) – $(n+m)$ мерная искомая вектор-функция, $f(t, x)$, $g(t, x)$ – заданные соответственно n и m мерные дискретные вектор-функции, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные n и m мерные соответственно дискретные вектор-функции, x_0 , x_1 , t_0 , t_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ – натуральные числа, $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$ – заданные дискретные матричные функции соответствующих размерностей.

Найдем представления решений системы уравнений (2.1) с краевыми условиями (2.2).

3. Представления решений

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1). Интерпретируя это уравнение как линейное неоднородное разностное уравнение относительно t при каждом x на основе формулы о представлении решений линейных обыкновенных разностных уравнений (см. напр. [6, с. 50-51, 7]) будем иметь:

$$\begin{aligned} z(t, x) &= F_1(t, t_0 - 1, x)z(t_0, x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)f(\tau, x) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)y(\tau, x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $F_1(t, \tau, x)$ – $(n \times n)$ матричная функция (аналог матрицы Коши) являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} F_1(t, \tau - 1, x) &= F_1(t, \tau, x)A(\tau, x), \\ F_1(t, t - 1, x) &= E_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

($E_1 - (n \times n)$ единичная матрица).
Аналогично рассуждая получаем, что

$$\begin{aligned} y(t, x) &= F_2(t, x, x_0 - 1)y(t, x_0) + \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)g(t, s) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)z(t, s). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $F_2(t, x, s) - (m \times m)$ матричная функция,

$$\begin{aligned} F_2(t, x, s - 1) &= F_2(t, x, s)D(t, s), \\ F_2(t, x, x - 1) &= E_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

($E_2 - (m \times m)$ единичная матрица).

Поскольку

$$\begin{aligned} z(t, s) &= F_1(t, t_0 - 1, s)a(s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, s)f(\tau, s) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, s)B(\tau, s)y(\tau, s), \end{aligned}$$

поэтому из (3.3) получаем, что

$$\begin{aligned} y(t, x) &= F_2(t, x, x_0 - 1)b(t) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)g(t, s) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, t_0 - 1, s)a(s) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, \tau, s)f(\tau, s) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, \tau, s)B(\tau, s)y(\tau, s). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, используя формулу

$$\begin{aligned} y(\tau, x) &= F_2(t, x, x_0 - 1)b(\tau) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(\tau, x, s)g(\tau, s) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(\tau, x, s)C(\tau, s)z(\tau, s), \end{aligned}$$

аналогично доказательству представления (3.5) доказывается, что

$$\begin{aligned} z(t, x) &= F_1(t, t_0 - 1, x)a(x) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)f(\tau, x) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, x_0 - 1)b(\tau) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, s)g(\tau, s) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, s)C(\tau, s)z(\tau, s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положим по определению

$$\begin{aligned} q_1(t, x) &= F_1(t, t_0 - 1, x)a(x) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)f(\tau, x) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, x_0 - 1)b(\tau) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, s)g(\tau, s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(t, x) &= F_2(t, x, x_0 - 1)b(t) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)g(t, s) + \\ &+ \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, t_0 - 1, s)a(s) + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, \tau, s)f(\tau, s), \end{aligned}$$

$$Q_1(t, x, \tau, s) = F_1(t, \tau, x)B(\tau, x)F_2(\tau, x, s)C(\tau, s)$$

$$Q_2(t, x, \tau, s) = F_2(t, x, s)C(t, s)F_1(t, \tau, s)B(\tau, s)$$

Тогда соотношения (3.5), (3.6) можно записать соответственно в виде

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x, \tau, s)z(\tau, s) + q_1(t, x), \quad (3.7)$$

$$y(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_2(t, x, \tau, s) y(\tau, s) + q_2(t, x). \quad (3.8)$$

Соотношения (3.7), (3.8) представляют собой двумерные неоднородные разностные уравнения типа Вольтерра специального вида.

Справедливо следующее утверждение о представлении решений этих уравнений.

Теорема 1. Пусть $R_1(t, x, \tau, s)$ и $R_2(t, x, \tau, s)$ ($n \times n$) и ($m \times m$) матричные функции соответствующих размерностей, являющихся решениями уравнений

$$\begin{aligned} R_1(t, x, \tau, s) = \\ = \sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1} \sum_{\beta=s+1}^{x-1} Q_1(t, x, \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta, \tau, s) - \\ - Q_1(t, x, \tau, s), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} R_2(t, x, \tau, s) = \\ = \sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1} \sum_{\beta=s+1}^{x-1} Q_2(t, x, \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta, \tau, s) - \\ - Q_2(t, x, \tau, s). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда решения уравнений (3.7), (3.8) допускают представления

$$\begin{aligned} z(t, x) = q_1(t, x) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x, \tau, s) q_1(\tau, s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} y(t, x) = q_2(t, x) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_2(t, x, \tau, s) q_2(\tau, s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Доказательство. Сначала докажем, что представление (3.11) является решением уравнения (3.7).

Из него ясно, что

$$\begin{aligned} z(\tau, s) = q_1(\tau, s) - \\ - \sum_{\alpha=\tau+1}^{\tau-1} \sum_{\beta=s+1}^{s-1} R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q_1(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.11) и (3.13) в (3.7) будем иметь:

$$\begin{aligned} q_1(t, x) - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) = \\ = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) \times \\ \times \left[q_1(\tau, s) - \sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1} \sum_{\beta=x_0}^{s-1} R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q_1(\alpha, \beta) \right] + \\ + q_1(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1} \sum_{\beta=x_0}^{s-1} R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q_1(\alpha, \beta) \right] + \\ + q_1(t, x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

В работах [7, 8] и др. приведен дискретный аналог формулы Фубини. Используя двумерный аналог этой формулы (см. напр. [11, с. 113]) получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1} \sum_{\beta=x_0}^{s-1} Q_1(t, x; \tau, s) R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q_1(\alpha, \beta) \right] = \\ = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1} \sum_{\beta=s+1}^{x-1} Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) \right] q_1(\tau, s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Принимая во внимание тождество (3.15) из (3.14) получим, что

$$\begin{aligned} q_1(t, x) - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1} \sum_{\beta=x_0}^{s-1} Q_1(t, x; \tau, s) R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q_1(\alpha, \beta) \right] - \\ - q_1(t, x) = - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) q_1(\tau, s) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1} \sum_{\beta=s+1}^{x-1} Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) \right] q_1(\tau, s) = \\ = - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[R_1(t, x; \tau, s) + Q_1(t, x; \tau, s) - \right. \end{aligned}$$

$$-\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1} \sum_{\beta=s+1}^{x-1} Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) \Big] q_1(\tau, s) = 0.$$

Этим представление (3.11) доказано.

Представление (3.12) доказывается симметричными рассуждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Г.М., Волин Ю.М.* Моделирование сложных химико-технологических схем. М.: Химия, 1975, 311 с.
2. *Островский Г.М., Волин Ю.М.* Методы оптимизации сложных химико-технологических схем. М.: Химия, 1970, 328 с.
3. *Маркин Е.А., Стреколовский А.С.* О существовании, единственности и устойчивости решения для одного класса динамических систем, описывающих химические процессы // Вестник МГУ. Сер. Выч. мат. и киберн., 1974, № 4, с. 3-11.

4. *Roesser R.P.* A discrete state-space model for linear image processing // IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, vol. AC-20, pp. 1-10.
5. *Гайшун И.В.* Многопараметрические системы управления. М.: Наука и техника, 1996, 200 с.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973, 248 с.
7. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Б.: изд-во БГУ, 2002, 114 с.
8. *Ивинская Е.В., Колмановский В.Б.* Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтера // Автоматика и телемеханика. 2000, № 8, 86-97.
9. *Колмановский В.Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтера // Автоматика и телемеханика, 2000, № 4, с. 42-50.
10. *Choi S.K., Goo Y.H., Koo N.J.* Asymptotic behavior of nonlinear Volterra difference systems // Bull. Korean Math. Soc. 2007, vol. 44, № 1, pp. 177-184.
11. *Mansimov K.B., Amirova R.R.* Necessary optimality conditions in a control problem described by a system of Volterra type two-dimensional difference equations // Transac. of NAS of Azerbaijan, 2010, vol. XXX, № 4, pp. 111-122.

*Институт кибернетики НАН Азербайджана
Бакинский государственный университет*

ROSSER TIPLİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİNİN BİR GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

S.Ş.Qədirova, K.B.Mənsimov

Məqalədə müəyyən sərhəd şərti daxilində Rosser tipli 2D xətti tənliklər sisteminin həllinin göstərilişi tapılmışdır.

ON ONE RESPONSE FORMULA SOLUTION THE ROESSER TYPE EQUATIONS

S.Sh.Gadirova, K.B.Mansimov

In the paper a Roesser type two-parameter linear inhomogeneous difference equation is considered. The expressions satisfying some conditions of the solution one found its mean.