

УДК 517.5

Математика

О БАЗИСНОСТИ РИССА ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

А.Р.Сафарова

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.Дж.Гаджиевым)

Рассматривается система экспонент с вырождающимся коэффициентом. Изучаются базисные свойства этой системы в весовом лебеговом пространстве функций. Получен критерий базисности Рисса.

Ключевые слова: базисность Рисса, система экспонент, вырождение, весовое пространство

1. Введение

Еще в 1946 г. Н.К.Бари [1] поставил вопрос о существовании нормированного базиса в гильбертовом лебеговом пространстве, не являющимся базисом Рисса. Первый подобный пример построен К.И.Бабенко [2]. Эту идею развил в своей работе Г.Ф. Гапошкин [3]. В работе [4] найдено необходимое и достаточное условие на вес относительно базисности классической системы экспонент в весовом пространстве Лебега. Этим условием является известное условие Макенхоупта (см. напр. [5]). Базисности системы экспонент, косинусов и синусов с линейной фазой в весовом пространстве изучены в работах [6-8]. К этому кругу вопросов можно отнести также работы [9;10]. Из результатов этих работ в частности следует, что если вес ρ имеет вырождение, то система экспонент не образует базис Рисса в $L_{2,\rho}$.

В предлагаемой работе рассматривается базисность системы экспонент с вырождающимся коэффициентом в весовом пространстве. В этом случае вырождающаяся система экспонент может образовывать базис Рисса в весовом пространстве.

2. Необходимые понятия и факты

Через Z как обычно обозначаем целые числа. Пусть X – некоторое банахово

пространство. Линейную оболочку множества $M \subset X$ обозначим через $L[M]$, а замыкание через $\overline{M}$. $L(X)$ – банахово пространство ограниченных операторов, действующих в X .

Система $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ называется *полной* в X , если $\overline{L[\{x_n\}_{n \in N}]} = X$. Она называется *минимальной* в X , если $x_k \notin \overline{L[\{x_n\}_{n \neq k}]}$, $\forall k \in N$.

Система $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ называется *минимальной* в X , если $x_k \notin \overline{L[\{x_n\}_{n \neq k}]}$, $\forall k \in N$.

Система $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ называется *базисом* в X , если для $\forall x \in X$,

$$\exists! \{\lambda_n\}_{n \in N} \subset K : x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Базис $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ в гильбертовом пространстве называется *базисом Рисса*, если существует автоморфизм $T : X \leftrightarrow X$, такой, что $Tx_n = e_n$, $\forall n \in N$, где $\{e_n\}_{n \in N}$ ортонормированный базис в X .

$L_{p,\rho} \equiv L_{p,\rho}(-\pi, \pi)$ – весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{p,\rho} \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Основные результаты

Пусть $\rho > 0$ п.в. на $(-\pi, \pi)$ некоторая весовая функция и $L_{p;\rho} \equiv L_{p;\rho}(-\pi, \pi)$, $1 < p < +\infty$, соответствующее весовое пространство.

Сопряженное к $L_{p;\rho}$ пространство отождествляем с $L_{q;\rho}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Функционал l_g , порожденный функцией $g \in L_{q;\rho}$, определяется выражением

$$l_g(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \rho(t) dt, \quad \forall f \in L_{p;\rho},$$

где $(\cdot)$ – комплексное сопряжение. Рассмотрим систему экспонент $\{\nu(t)e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv E_\nu$ с вырождающимся коэффициентом ν :

$$\nu(t) = |t|^{\alpha_0} \prod_{k=1}^r |t - t_k|^{\alpha_k},$$

где $\{t_k\}_1^r \subset (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$, $\{\alpha_k\}_0^r \subset \mathbb{R}$. Положим $\mu(t) = \rho^{\frac{1}{p}}(t)\nu(t)$. Нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\nu \in L_{p,\rho}$. Тогда система E_ν полна в $L_{p;\rho}$, если $\nu(t)\rho(t) \neq 0$, п.в. на $(-\pi, \pi)$.

В действительности, если $f \in L_{q,\rho}$ аннулирует систему E_ν , т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \nu(t) e^{int} f(t) \rho(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

то функция $\tilde{f}(t) = \nu(t)\rho(t)f(t)$ аннулирует систему $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv E$. Нетрудно заметить, что $\tilde{f} \in L_1$. Так как система E полна в $C^0[-\pi, \pi] \equiv \{f \in C[-\pi, \pi]: f(-\pi) = f(\pi)\}$, где $C[-\pi, \pi]$ – пространство непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций $\sup$ -нормой и $L_1 \subset (C^0[-\pi, \pi])^*$ (X^* – сопряженное к X пространство), то из соотношения (1) не-

посредственно следует $f = 0$ п.в. на $(-\pi, \pi)$.

Так же справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\nu \rho \neq 0$ п.в. на $(-\pi, \pi)$ и $\nu \in L_{p;\rho}$. Тогда система E_ν минимальна в $L_{p;\rho}$ только тогда, когда система E_μ минимальна в L_ρ .

Совершенно очевидно, что E_ν минимальна в $L_{p;\rho}$ тогда, когда имеет место $\nu^{-q} \rho^{1-q} \in L_1$. Более того, минимальность системы E_ν в $L_{p;\rho}$ эквивалентна минимальности системы E в $L_{p;\tilde{\rho}}$, где $\tilde{\rho} = \nu^p \rho$. Используя эти простые соображения легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\nu \in L_{p;\rho}$ и $\nu_p \neq 0$ п.в. на $(-\pi, \pi)$. Тогда система E_ν образует базис в $L_{p;\rho}$ (при $p = 2$ базис Рисса) только в том случае, если система E образует базис в $L_{p;\tilde{\rho}}$ (при $p = 2$ базис Рисса).

Предположим, что система E_ν образует базис в $L_{p;\rho}$ и $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L_{q;\rho}$ соответствующая биортогональная система. В этом случае система E минимальна в $L_{p;\tilde{\rho}}$ и биортогональная к ней система имеет вид $\tilde{y}_n(t) = \nu^{1-p}(t)y_n(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Возьмем $\forall f \in L_{p;\tilde{\rho}}$ и рассмотрим частичную сумму

$$S_m = \sum_{n=-m}^m f_n e^{int},$$

где $f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{\tilde{y}_n(t)} \tilde{\rho}(t) dt$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \nu(t) \overline{y_n(t)} \rho(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \overline{y_n(t)} \rho(t) dt = \\ &= F_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{где } F(t) \equiv \nu(t)f(t). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $F \in L_{p;\rho}$. Итак

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} |S_m - f|^p \tilde{\rho}(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-m}^m F_n e^{int} - f \right|^p \nu^p(t) \rho(t) dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-m}^m F_n \nu e^{int} - F(t) \right|^p \rho(t) dt. \quad (2)
\end{aligned}$$

Из соотношения (2) следует требуемое, так как, по предположению система E_ν образует базис в $L_{p;\rho}$. Аналогичным образом устанавливается справедливость обратного утверждения.

Рассмотрим случай $p = 2$. Предположим, что система E_ν образует базис Рисса в $L_{2;\rho}$. Тогда существует автоморфизм $T: L_{2;\rho} \leftrightarrow L_{2;\rho}$, такой, что $T[\nu(t)e^{int}] = e_n, \forall n \in \mathbb{Z}$, где $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ некоторый ортонормированный базис в $L_{2;\rho}$. Положим

$$\omega_n = \nu^{-1} e_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\omega_n|^2 \tilde{\rho} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} |e_n|^2 \nu^{-2} \nu^2 \rho dt = \int_{-\pi}^{\pi} |e_n|^2 \rho dt, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \omega_n \overline{\omega_k} \tilde{\rho} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n \overline{e_k} \rho dt = \delta_{nk}, \quad \forall n, k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

следует, что $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ортонормированная в $L_{2;\rho}$ система. Определим оператор T_ν выражением

$$T_\nu f = \nu^{-1} T[\nu f], \quad f \in L_{2;\rho}.$$

Ясно, что T_ν линейный оператор. Покажем, что он ограниченно действует в $L_{2;\rho}$. Так как, $T \in L(L_{2;\rho})$, то ясно, что имеет место

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Tf|^2 \rho dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \rho dt, \quad \forall f \in L_{2;\rho},$$

где M – независимая от f постоянная. Используя это соотношение легко получаем

$$\begin{aligned}
\|T_\nu F\|_{2;\rho}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |T_\nu F|^2 \tilde{\rho} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \nu^{-2} |T[\nu F]|^2 \nu^2 \rho dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |T[\nu F]|^2 \rho dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \nu^2 |F|^2 \rho dt = \\
&= M \int_{-\pi}^{\pi} |F|^2 \tilde{\rho} dt = M \|F\|_{2;\rho}^2, \quad \forall F \in L_{2;\rho},
\end{aligned}$$

так как $\nu F \in L_{2;\rho}$. Отсюда непосредственно следует, что $T_\nu \in L(L_{2;\rho})$. Покажем, что $\text{Ker } T_\nu = \{0\}$. Пусть $f \in \text{Ker } T_\nu$, т.е.

$$\begin{aligned}
T_\nu f &= 0 \Rightarrow \nu^{-1} T[\nu f] = 0 \Rightarrow T[\nu f] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \nu f = 0 \Rightarrow f = 0,
\end{aligned}$$

так как $\nu^{\pm 1} \neq 0$ п.в. на $(-\pi, \pi)$. Следовательно, $\text{Ker } T_\nu = \{0\}$. Найдем T_ν^{-1} . Пусть $g \in \text{Im } T_\nu$ и $T_\nu f = g$. Тогда

$$\begin{aligned}
\nu^{-1} T[\nu f] &= g \Rightarrow T[\nu f] = \nu g \Rightarrow \\
&\Rightarrow f = \nu^{-1} T^{-1}[\nu g] \Rightarrow T_\nu^{-1}(\cdot) = \nu^{-1} T^{-1}[\nu(\cdot)]
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что $T_\nu^{-1} \in L(L_{2;\rho})$. Нетрудно заметить, что $\text{Im } T_\nu \equiv L_{2;\rho}$. Таким образом, T_ν является автоморфизмом в $L_{2;\rho}$. Имеем

$$\begin{aligned}
T_\nu [e^{int}] &= \nu^{-1}(t) T[\nu(t)e^{int}] = \\
&= \nu^{-1}(t) e_n(t) = \omega_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что система $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в $L_{2;\rho}$. Аналогичным способом доказывается обратное утверждение.

Далее будем пользоваться следующим условием Макенхоупта

$$\sup_{I \subset [-\pi, \pi]} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \nu(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I [\nu(t)]^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} < +\infty,$$

где $\sup$ берется по всем интервалам $I \subset [-\pi, \pi]$ и $|I|$ есть лебегова мера I .

Класс весов, удовлетворяющих условию Макенхоупта обозначим через A_p . Известно, что система E образует базис в весовом пространстве Лебега, когда вес удовлетворяет условию Макенхоупта. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Система E_v образует базис в $L_{p,\rho}$ только тогда, когда $\rho \in A_p$.

Рассмотрим случай $p = 2$. По результатам работы [3] в этом случае система E образует базис Рисса в $L_{2,\tilde{\rho}}$ только тогда, когда $\tilde{\rho}$ в нуль и в бесконечность не обращается, т.е. $|\tilde{\rho}|^{\pm 1} \in L_\infty$. Следовательно, справедлива

Теорема 3. Система E_v образует базис Рисса в $L_{2,\rho}$ только тогда, когда

$$|\tilde{\rho}|^{\pm 1} \in L_\infty.$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1. В действительности, система E_v образует базис Рисса в $L_{2,\rho}$ только тогда, когда система E образует базис Рисса в $L_{p,\rho}$, а это имеет место только тогда, когда $|\tilde{\rho}|^{\pm 1} \in L_\infty$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Б.Т. Билалову за постановку задачи и внимание к ее решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. О базисах в гильбертовом пространстве// ДАН СССР, 1946, т. LIV, №5, 383-386.
2. Бабенко К.И. О сопряженных функциях// ДАН СССР, 1948, т. 62, №2, с. 157-160.
3. Гапошкин В.Ф. Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях// Мат. сборник, 1958, т. 46 (88), №3, с. 111-115.
4. Kazaryan K.S., Lizorkin P.I. Multipliers, bases and unconditional bases in the weighted spaces B and SB// Proc. of the Steklov Ins. of Math., 1989, 187, pp. 111-130.
5. G. J. Garnett. Bounded Analytic Functions. M.: Mir, 1984, 469 p.
6. Moiseev E.I. On basicity of systems of cosines and sines in weight space// Diff. uravn., vol. 34, No.1, 1998, pp. 40-44.
7. Moiseev E.I. The basicity in the weight space of a system of eigen functions of a differential operator//Diff. uravn., 1999, v.35, No2, pp.200-205.
8. Pukhov S.S., Sedletsii A.M. Bases of exponents, sines and cosines in weight spaces on finite interval// Dokl. RAN, vol. 425, 4 (2009), pp.452-455.
9. Билалов Б.Т., Велиев С.Г. Базисы из собственных функций двух разрывных дифференциальных операторов// Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, № 9, с. 190-192

Нахчыванский государственный университет

CIRLAŞAN EKSPONENT SİSTEMİNİN RİSS BAZİSLİYİ HAQQINDA

A.R.Səfərova

Cırlaşan əmsallı eksponent sistemə baxılmışdır. Funksiyaların çəkili Lebeq fəzasında bu sistemin bazislik xassələri öyrənilmişdir. Riss bazisliyi üçün kriteriya alınmışdır.

Açar sözlər: Riss bazisliyi, eksponent sistemi, cırlaşma, çəkili fəza

ON RIESZ BASICITY OF THE DEGENERATE SYSTEM OF EXPONENTS

A.R.Safarova

A system of exponents with degenerate coefficient is considered. The basis properties of this system in the weighted Lebesgue space of functions is studied and a criterion for Riesz basicity is obtained.

Keywords: Riesz basicity, system of exponents, degeneration, weighted space