

УДК 517.5

Математика

О ВЕКТОРНОМ КЛАССЕ ХАРДИ

Т.И.Наджафов

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.Дж.Гаджиевым)

Рассматриваются векторные классы $L_p(X)$ и $H_p(X)$, где X банахово пространство являющиеся обобщениями аналогичных пространств Лебега и Харди для скалярного случая. Исследуются базисы из подпространств в $L_p(X)$ и доказывается справедливость формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла типа Коши.

Ключевые слова: Лебега и Харди векторные классы, базисы из подпространства, интеграл типа Коши

1. Введение

Классы Харди играют важную роль во многих вопросах математики и в том числе в гармоническом анализе. Теория этих классов достаточно хорошо изучена и ей посвящены известные монографии, напр. [1-3] и др. Их абстрактным обобщениям посвящено много работ (см. напр. [4-11]). Краевые задачи Римана в классах Харди в скалярном случае также достаточно хорошо изучены и освещены в монографии [12]. Один абстрактный вариант этой задачи был рассмотрен в банаховой алгебре с точки зрения приложения к факторизации операторов (см. напр. [10]). Непосредственное обобщение этих задач в конечномерном случае хорошо изучено и его теория разработана в монографии [13].

В предлагаемой работе рассматривается именно бесконечномерный случай рассматриваемых пространств. Сформулированы естественные аналоги классических задач Римана в классах Харди и, при определенных ограничениях, доказана их корректная разрешимость.

2. Классы $L_p^\pm(X)$

Будем пользоваться понятием базиса подпространств. Пусть X некоторое B – пространство. Система из подпространств

$\{X_n^+, X_n^-\}_{n,k \in N} \subset X$ называется базисом в X , если для $\forall x \in X$, существует единственная последовательность $\{x_n^\pm\}_{n \in N}$, $x_n^\pm \in X_n^\pm$ такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-.$$

Пусть X – сепарабельное B – пространство. Обозначим через $L_p(X)$ класс функций $\mathcal{G}: [0, 2\pi] \rightarrow X$, измеримых (сильно либо слабо, безразлично, в силу сепарабельности X) и таких, что

$$\|\mathcal{G}\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\mathcal{G}(t)\|_X^p dt < +\infty, 1 \leq p < +\infty,$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма в X . При таком определении нормы, $L_p(X)$ превращается в сепарабельное B – пространство. Функции из $L_p(X)$, совпадающие почти всюду (по мере Лебега), отождествляются.

Пусть последовательность $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in N} \subset L_p(X)$ сходится к $\mathcal{G} \in L_p(X)$ в $L_p(X)$, т.е. $\|\mathcal{G}_n - \mathcal{G}\|_p^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Тогда можно выбрать такую подпоследова-

тельность $\{\mathcal{G}_{n_k}\}_{k \in N}$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \|\mathcal{G}_{n_k}(t) - \mathcal{G}(t)\|_X^p dt < +\infty.$$

Отсюда по теореме Беппо-Леви получаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathcal{G}_{n_k}(t) - \mathcal{G}(t)\|_X^p$$

п.в. сходится, и в результате

$$\|\mathcal{G}_{n_k}(t) - \mathcal{G}(t)\|_X^p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \text{ п.в. на } [0, 2\pi].$$

Следовательно, из каждой сходящейся в $L_p(X)$ последовательности можно выделить п.в. сходящуюся подпоследовательность.

Обозначим через $L_p^{(k)}(X)$ подпространство пространства $L_p(X)$, образованное функциями вида $e^{ikt}a$, $a \in X$, где $k \in Z$ – целое число.

Пусть $q: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ – сопряженное к p число. Аналогичным образом определяем пространство $L_q(X)$ и семейство его подпространств $\{L_q^{(k)}(X)\}_{k \in Z}$. Известно, что (см. напр. [9; 14]) $L_q(X^*)$ можно отождествлять с $(L_p(X))^*$ и произвольный элемент $\mathcal{G}^* \in (L_p(X))^*$ реализуется элементом $\mathcal{G} \in L_q(X^*)$ с помощью

$$\mathcal{G}^*(f) = \int_0^{2\pi} \mathcal{G}^*(t) f(t) dt, \quad \forall f \in L_p(X),$$

где $\mathcal{G}^*(f) = \langle f, \mathcal{G}^* \rangle$ – значение функционала $\mathcal{G}^*$ на элементе f . Покажем, что

$$L_p(X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} L_p^{(k)}(X),$$

т.е. $\forall \mathcal{G} \in L_p(X)$ имеет место разложение

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} \mathcal{G}_k,$$

где $\mathcal{G}_k \in X$, $\forall k \in Z$. Сперва покажем, что система $\{L_p^{(k)}(X)\}_{k \in Z}$ полна в $L_p(X)$. Пусть элемент $\mathcal{G}^* \in (L_p(X))^*$ аннулирует все $L_p^{(k)}(X)$, $k \in Z$, т.е.

$$\mathcal{G}^*(f_k) = 0, \quad \forall f_k \in L_p^{(k)}(X), \quad \forall k \in Z.$$

Пусть $\mathcal{G} \in L_q(X^*)$ реализующий элемент $\mathcal{G}^*$. f_k имеет вид $f_k(t) = e^{ikt} f$, $f \in X$. Таким образом, имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} (f, \mathcal{G}(t)) dt = 0, \quad \forall f \in X, \quad \forall k \in Z.$$

Отсюда следует, что $(f, \mathcal{G}(t)) = 0$ п.в. на $[0, 2\pi]$, т.е. $(f, \mathcal{G}(t)) = 0$, $\forall t \in I \setminus E_f$, где $I \equiv [0, 2\pi]$ и $mes E_f = 0$. Пусть $\tilde{X} \subset X$ счетное всюду плотное в X множество. Положим $E = \bigcup_{f \in \tilde{X}} E_f$. Ясно, что $mes E = 0$. Из $(f, \mathcal{G}(t)) = 0$, $\forall f \in \tilde{X}$, $\forall t \in I \setminus E$ следует, что $\mathcal{G}(t) = 0$, $\forall t \in I \setminus E$. Полнота системы $\{L_p^{(k)}(X)\}_{k \in Z}$ в $L_p(X)$ доказана.

Пусть $f \in L_p(X)$ и f_k ее коэффициент Фурье, т.е.

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Ясно, что $f_k \in X$, $\forall k \in Z$. Рассмотрим оператор $P_k: L_p(X) \rightarrow L_p^{(k)}(X)$, $k \in Z$: $P_k f = e^{ikt} f_k$. Нетрудно заметить, что имеет место

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \quad \forall i, j \in Z,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Применяя неравенство Гельдера, получаем, что оператор P_k непрерывен. Рассмотрим частичные суммы

$$S_n = \sum_{k=-n}^n P_k, \quad n \in Z_+ = N \cup \{0\}. \quad (1)$$

Учитывая выражения P_k в (1), совершенно аналогично классическому случаю получаем

$$S_n f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\tau - t) f(\tau) d\tau, \quad \forall n \in N,$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad n \in N.$$

Имеем

$$\| [S_n f](t) \|_X \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\| f(\tau + t) \|_X}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau, \quad \forall n \in N.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\| [S_n f](\cdot) \|_p^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Gamma(\| f \|_X)(t) \right|^p dt, \quad (2)$$

где $\tilde{A}$ – преобразования Гильберта

$$[\tilde{A}f](t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\tau + t)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau.$$

Всюду мы будем считать функцию f периодически продолженной (с периодом 2π) на всю ось R . Так как преобразование Гильберта ограничено действует в $L_p(0, 2\pi)$, $1 < p < +\infty$, то из (2) непосредственно следует

$$\| [S_n f](\cdot) \|_p \leq c_p \| f(\cdot) \|_p, \quad \forall n \in N,$$

где c_p – зависящая только от p постоянная. В результате получаем, что семейство

проекторов $\{S_n\}_{n \in N}$ равномерно ограничено в $L_p(X)$. Тогда известно, что (см. напр. [15]) система $\{P_n\}_{n \in Z}$ образует базис в $L_p(X)$. Следовательно, $\forall f \in L_p(X)$ имеет разложение в $L_p(X)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (P_n f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} f_n.$$

Совершенно очевидно, что такое разложение единственное. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Семейство проекторов $\{P_n\}_{n \in Z}$ образует сильный базис в $L_p(X)$, т.е.

$$I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \Leftrightarrow L_p(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_p^{(n)}(X).$$

Положим

$$L_p^+(X) \equiv \{f \in L_p(X) : P_n f = 0, \quad \forall n < 0\}.$$

$L_p^+(X)$ является подпространством пространства $L_p(X)$. Возьмем $\forall f \in L_p^+(X)$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int} f_n. \quad (3)$$

Пусть $\omega \equiv \{z \in C : |z| < 1\}$ и $\partial\omega \equiv \{z \in C : |z| = 1\}$. Обозначим через $P_r(\cdot)$ – ядро Пуассона

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Обратив внимание на соотношение

$$(re^{it})^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-s) e^{iks} ds, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq r < 1,$$

из (3) непосредственно получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (re^{it})^k f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-s) f(s) ds.$$

Положим

$$F(re^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{it})^k f_k.$$

Итак

$$F(re^{it})^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-s) f(s) ds.$$

Из этой формулы следует, что справедлива следующая обобщенная теорема Фату [4]:

Теорема Ф. $F(re^{it})$ сильно в X стремится к $f(t)$, когда $z = re^{it}$ некасательно стремится к e^{it} , оставаясь в единичном круге, для всякой точки t , для которой

$$\frac{1}{2s} \int_{t-s}^{t+s} f(\tau) d\tau \rightarrow f(t) \text{ сильно при } s \rightarrow 0,$$

т.е. почти всюду.

Аналогичным образом, используя соотношение

$$z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{\tau^k d\tau}{\tau - z}, z \in \omega, k \geq 0,$$

получаем формулу

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (4)$$

где $f(e^{it}) \equiv f(t)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть X сепарабельное B -пространство с сепарабельным сопряженным X^* и $f \in L_p(X)$, $1 < p < +\infty$. Тогда относительно функции $F(z)$, определенной выражением интеграла типа Коши (4), имеет место формула Сохоцкого-Племеля

$$F^\pm(\tau) = \pm \frac{1}{2} f(\tau) + [Sf](\tau), \text{ п.в. } \tau \in \partial\omega.$$

Более того, если $f \in L_p^+(X)$, то имеют место соотношения

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|T_r(f)(t) - f(t)\|_p = 0, \\ \|T_r(f)\|_p \leq M \|f\|_p,$$

где либо $T_r = P_r$ – оператор Пуассона, либо $T_r = \mathcal{H}_r$ – оператор Коши, $r: 0 \leq r < 1$ и M – независимая от f постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984, 364 с.
2. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
3. Garnett G. J. Bounded Analytic Functions. М.: Mir, 1984, 469 p.
4. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970, 432 с.
5. Бухвалов А.В. Пространства Харди векторнозначных функций // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, т. 65, с. 5–16.
6. Blasco O. Hardy spaces of vector-valued functions: Duality // Trans. Of the American Math. Soc., v. 308, No2, 1988, pp. 495–507.
7. Bourgain J. Vector valued singular integrals and H' -BMO duality / Probability Theory and Harmonic Analysis, Chao J.A. and Wojczynski W.A., editors, Marcel Dekker, New York, 1986, pp. 1–19.
8. Hensgen W. Hardy-Raume vector wertiger funktionen, Thesis, Munchen, 1986.
9. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и подгруппы. М.: ИЛ, 1962, 830 с.
10. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: ПИИИ, 1986, 260с.
11. Grafakos L. Modern Fourier Analysis, Springer, 2009, 507 p.
12. Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975, 256 с.
13. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970, 380 с.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
15. Singer I. Bases in Banach spaces, I, AP Springer, 1970, 673 p.

Нахчыванский государственный университет

HARDİ VEKTOR SİNİFLƏRİ

T.İ.Nəcəfov

X Banax fəza olduqda $L_p(X)$ və $H_p(X)$ vector siniflərinə baxılır. Bu siniflər skalyar halda oxşar Lebeq və Hardi siniflərinin ümumiləşməsidir. Həmçinin $L_p(X)$ fəzasında alt fəza bazisinə baxılmışdır. Koşi tipli integral üçün Soxotskiy-Plemel düsturunun doğruluğu isbat olunub.

Açar sözlər: *Lebeq və Hardi vector sinifləri, alt fəza bazisi, Koşi tip integral*

ON VECTOR CLASSES HARDY

T.İ.Nəcəfov

Vector classes $L_p(X)$ and $H_p(X)$ are considered, where X is a Banach space. These classes are the generalizations of similar Lebesgue and Hardy classes in scalar case. Subspace bases in $L_p(X)$ are also considered. The validity of Sokhotski-Plemelj formula for the Cauchy type integral is proved.

Keywords: *Lebesgue and Hardy vector classes, subspace bases, Cauchy type integra*