

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

И.А. Магеррамов, С.М. Мирсаабов

(Представлено академиком НАНА Ф.А.Алиевым)

Предлагается численный алгоритм прогонки для решения задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями, суть которого заключается в сведении граничных условий к начальному условию. Предложенный алгоритм позволяет уменьшать размерность задачи нахождения фундаментальной матрицы гамильтоновой системы.

Ключевые слова: метод прогонки, гамильтонова система, неразделенные краевые условия, фундаментальная матрица, метод Эйлера

Введение

В данном случае предлагается новый метод прогонки для решения соответствующей задачи, не требующей решения матричных уравнений Риккати, линейных матричных уравнений и др. [1]. Далее, приводится алгоритм для построения фундаментальных матриц [2], соответствующих гамильтоновой матрице, требующих решения матричных дифференциальных уравнений гораздо меньшей размерности [3-5].

Пусть движение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)x(t) + G(t)u(t), t \in [t_0, \tau], \quad (1)$$

с неразделенными краевыми условиями

$$K_1 x(t_0) - K_2 x(\tau) = q, \quad (2)$$

где x - n мерный фазовый вектор, $u(t)$ - m мерный вектор управляющих воздействий $F(t), G(t)$ - известные кусочно-непрерывные функции-матрицы $n \times n, n \times m$ размерности, K_1, K_2 - постоянные матрицы $k \times n$ размерности, q - постоянный k - мерный вектор, τ - заданное время. Предполагается, что пара $(F(t), G(t))$, управляемая в каждой точке отрезка времени (t_0, τ) [2], а система

линейных алгебраических уравнений СЛАУ (2) имеет хотя бы одно ненулевое решение $[x^T(t_0), x^T(\tau)]^T$.

Требуется найти управляющее воздействие $u(t)$ так, чтобы с соответствующим $x(t)$ из (1), (2) минимизировали квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} (x^T(t)R(t)x(t) + u^T(t)C(t)u(t))dt. \quad (3)$$

Здесь $R^T(t) \geq 0, C(t) = C^T(t) > 0$, соответственно $n \times n, m \times m$ размерности, тоже кусочно-непрерывные функции-матрицы, а T означает операцию транспонирования.

Как показано в [6], используя результаты [7], легко доказывается, что для начальных данных $x(0)$ имеется следующее линейное алгебраическое уравнение

$$D \begin{bmatrix} x(t_0) \\ v \end{bmatrix} = W, \quad (4)$$

где постоянный множитель Лагранжа, соответствующий краевому условию (2), постоянная матрица D и вектор W имеют вид

$$D = \begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) - \Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T + K_1^T \\ K_1 - K_2(\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0))K_2\Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)K_2^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix},$$

а фундаментальная матрица $\Phi(t, \tau)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = H\Phi(t, \tau), \Phi(r, \tau) = E$$

и гамильтонова матрица H имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} F - GC^{-1}G \\ -Q - F^1 \end{bmatrix} \text{ и } \Phi(\cdot) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\cdot)\Phi_{12}(\cdot) \\ \Phi_{21}(\cdot)\Phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Фазовые координаты $x(t)$ и $u(t)$ вычисляются из следующих выражений:

$$x(t) = (F(e) - c_1(t)c^{-1}(t)c_1(t)\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0))x(t) + c_1(t)c^{-1}(t)c_1(t)(\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0) - \Phi_{22}(t, t_0)K_1^T v, \quad (6)$$

$$u(t) = -c^{-1}(t)c_1(t)[(\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)x(t) + (\Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)K_1^T v]. \quad (7)$$

Теперь построим фундаментальные матрицы $\Phi(t, r)$.

Построение фундаментальных матриц $\Phi(t, \tau_0)$

Используя результаты [6, 7] легко доказывается, что $\Phi_{i,j}(\cdot)$ имеют вид:

$$\Phi_{11}(t, t_0) = \Psi(t) + W(t)(\Psi^T(t))^{-1}V(t)$$

$$\Phi_{12}(t) = -W(t)(\Psi^T(t))^{-1}$$

$$\Phi_{21}(t) = -(\Psi^T(t))^{-1}V(t)$$

$$\Phi_{22}(t) = (\Psi^T(t))^{-1},$$

где E единственная матрица. Используя методы Эйлера для вычисления $\Psi(t), W(t), V(t)$ получаем следующие функции

$$\Psi(t + \Delta) = \Psi(t) + \Delta(F + WR)\Psi(t)$$

$$W(t + \Delta) = W(t) + \Delta(FW + WF^T + WRW) - GQ^{-1}G^1) \quad (9)$$

$$V(t + \Delta) = V(t) + \Delta\Psi^T R\Psi.$$

Найдя из (8) W, Ψ, V , легко можем восстановить $x(t)$ и $u(t)$ численно из (4), (5).

Алгоритм решения задачи (1)-(3)

Исходя из (4)-(9) для решения задачи (1)-(3) имеем следующий алгоритм.

Алгоритм.

1. Заданы матрицы $F(t), G(t), K_1, K_2, R(t), C(t), \Psi(0), W(0), V(0)$ вектор q и шаг Δ .

2. По формуле (9) вычисляются $\Psi(\tau), W(\tau), V(\tau)$.

3. Из (8) находятся $\Phi_{11}(\tau, t_0), \Phi_{12}(\tau, t_0), \Phi_{21}(\tau, t_0), \Phi_{22}(\tau, t_0)$.

4. С помощью (5) вычисляются матрицы D и вектор $\tilde{W}$.

5. Решив СЛАУ (4), находится $x(t_0), V$.

6. Из (6) и (7) вычисляются $x(t), u(t)$.

7. Задав малое число ε , проверяется условие $\|K_1 x(t_0) - K_2(\tau) - q\| < \varepsilon$. Если удовлетворяется, то процесс останавливается, шаг уменьшается на Δ переходит к шагу 2.

Отметим, что такой алгоритм для решения задачи (1)-(3) позволяет далее организовать параллельное вычисление для ее решения.

Заклучение

Приводится вычислительный алгоритм для решения задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями. Такой алгоритм позволяет в дальнейшем организовать параллельные вычисления, может сохранять вычисления и повышать точность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной ситемой с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Дифференциальные уравнения, 1986, №2, с.345-347.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
3. Захар-Иткин М.Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований, УМН, 1971, т.28, №3, с.83-120.
4. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами, Киев: Наукова думка, 1980.
5. Hamidov R.H., Mutallimov M.M. Dimension reduction of one multivariable decision making problem, Appl.Comput.Math., v.18, N.1, 2019, pp.62-68.
6. Mutallimov M.M., Amirova L.I., Fikret A. Aliev, Faradjova Sh.A., Maharramov I.A., Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions, TWMS J. Pure Appl. Math, v.9, N.2, 2018, pp.243-246.
7. Магеррамов И.А. Численные алгоритмы решения задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями. Proceedings of IAM, v.9, N1, 2020, pp.72-82.

*Институт прикладной математики
при БГУ*

meherremov.ilkin.a@gmail.com

XƏTTİ KVADRATİK AYRILMAMIŞ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ İLƏ OPTİMALLAŞDIRMA PROBLEMLƏRİ HƏLL ETMƏK ÜÇÜN ƏDƏDİ QOVMA ALQORİTMİ

İ.Ə. Məhərrəmov, S.M. Mirsaabov

Ayrılmamış sərhəd şərtləri ilə optimal idarəetmə probleminin həlli üçün ədədi qovma alqoritmı təklif olunur, mahiyyəti sərhəd şərtlərini başlangıç vəziyyətə gətirməkdir. Təklif olunan alqoritm Hamilton sisteminin əsas matrisini tapmaq probleminin ölçüsünü azaltmağa imkan verir.

Açar sözlər: qovma metodu, Hamilton sistemi, ayrılmamış sərhəd şərtləri, fundamental matris, Eyler metodu

NUMERICAL SWEEP ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEMS WITH INSEPARABLE BOUNDARY CONDITIONS

I.A. Maharramov, S.M. Mirsaabov

A computational algorithm for solving the optimization problem by nonseparated boundary conditions is presented. Such an algorithm is called in the following to organize parallel computations, it can save computation and increase the accuracy of the solution.

Keywords: sweep method, Hamiltonian system, nonseparated boundary conditions, fundamental matrix, Euler's method