

УДК 517.9

АППРОКСИМАЦИИ НЕВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

М.А. Садыгов

(Представлено академиком НАНА Ф.А.Алиевым)

В работе получены необходимые условия экстремума первого порядка для негладких экстремальных задач при наличии ограничений в банаховом пространстве. Рассмотрен ряд определений аппроксимации функции в окрестности точки и изучен ряд их свойств.

Ключевые слова: сублинейная функция, липшицевая функция, локальный минимум

Введение

Субдифференциал функции тесно связан с аппроксимацией функции в окрестности точки сублинейной, выпуклой или положительно однородной функцией (см.[1]). Поэтому в негладком анализе важную роль играют определения аппроксимации функции в окрестности точки. В данной работе рассмотрен ряд определений аппроксимации функции в окрестности точки сублинейной функцией и изучен ряд их свойств. Рассмотрена аппроксимация другого типа, которую можно применять для минимизации ограничения типа равенства. Используя введенные определения аппроксимации отображения в окрестности точек и аналогов теоремы Фана, получены необходимые условия экстремума первого порядка для негладких экстремальных задач при наличии ограничений.

Об аппроксимации невыпуклых функций

Пусть X и Y банаховы пространства, $F: X \rightarrow Y$, $S: X \rightarrow Y$, $f: X \rightarrow R$, $\varphi: X \rightarrow R$, $K > 0$ и $\delta > 0$. Положим $B = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, $B(x_0, \alpha) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq \alpha\}$, $\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, $R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$,

где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$\|F(\bar{x} + x) - F(\bar{x}) - S(x)\| \leq o(\|x\|^\beta)$$

при $x \in \delta B$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S - (o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке $\bar{x}$ или отображение $S(x)$ назовем $o(\beta)$ -порядка аппроксимации отображений f в δ окрестно-

сти точки $\bar{x}$.

Если $F(x) = f(x)$, то предположим, что $S(x) = \varphi(x)$.

Считаем, что $S(x) = S_1(x) + \dots + S_m(x)$, где $S_1: X \rightarrow Y$ положительно однородный, сублинейный, т.е. выпуклый и положительно однородный или линейный оператор, $S_k: X \rightarrow Y$ положительно однородное степени k - отображение, т.е. $S_k(\lambda x) = \lambda^k S_k(x)$ при $\lambda \geq 0$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$,

где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) - \varphi(x) \leq o(\|x\|^\beta)$ при $x \in \delta B$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta), \delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке $\bar{x}$ или функцию $\varphi(x)$ назовем $o(\beta)$ -порядка верхней аппроксимации функций f в δ окрестности точки $\bar{x}$.

Пусть Z банахово пространство, P замкнутый выпуклый конус в Z , определяющий отношение частичного упорядочения $\leq$. Положительно однородный выпуклый оператор $A: X \rightarrow Z$ называется сублинейным.

Пусть $F: X \rightarrow Z$ и $A: X \rightarrow Z$ сублинейный оператор. Если для каждого $x \in X$ существуют числа $\delta > 0$ и $K > 0$, функции $r_x: [0, \delta] \rightarrow X$ и $o_x: [0, \delta] \rightarrow R_+$, где

$$\|r_x(t)\| \leq Kt \max\{\|A(x)\|, \|A(-x)\|\} + o_x(t), \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{o_x(t)}{t} = 0$$

такие, что $-tA(-x) \leq F(\bar{x} + tx + r_x(t)) - F(\bar{x}) \leq tA(x)$ при $t \in [0, \delta]$, то будем говорить, что отображение F в точке $\bar{x}$ допускает порядково сублинейную аппроксимацию $A(x)$.

Если Z векторная решетка (см.[2]), то

по соотношению 19.32 теоремы 19.4[2] отсюда следует, что $|F(\bar{x} + tx + r_x(t)) - F(\bar{x})| \leq \max_t \{ |A(x)|, |A(-x)| \}$ при $t \in [0, \delta]$, где через $|z|$ обозначена модуль элемента $z \in Z$.

Лемма 1. Если Z нормированная решетка (см.[2, с.391]), сублинейный оператор $A: X \rightarrow Z$ непрерывен в точке нуль, то существует число $c > 0$ такое, что $\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq c \|x_1 - x_2\|$ при $x_1, x_2 \in X$.

Пусть Z нормированная решетка (см.[2, 391]), $F: X \rightarrow Z$ и $A: X \rightarrow Z$ сублинейный оператор. Если для каждого $x \in X$ существуют числа $\delta > 0$ и $K > 0$, функции $r_x: [0, \delta] \rightarrow X$ и $o_x: [0, \delta] \rightarrow R_+$, где $\|r_x(t)\| \leq Kt \max\{\|A(x)\|, \|A(-x)\|\} + o_x(t)$, $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o_x(t)}{t} = 0$ такие, что

$$\|F(\bar{x} + tx + r_x(t)) - F(\bar{x})\| \leq Kt \max\{\|A(x)\|, \|A(-x)\|\}$$

при $t \in [0, \delta]$, то будем говорить, что отображение F в точке $\bar{x}$ допускает сублинейную аппроксимацию $A(x)$.

Если число K и функции $r_x: [0, \delta] \rightarrow X$ и $o_x: [0, \delta] \rightarrow R_+$ не зависят от x , то будем говорить, что отображение F в точке $\bar{x}$ допускает равномерно сублинейную аппроксимацию $A(x)$.

В частности, когда $Z = R^k$ из введенного определения следует следующее определение.

Пусть $F: X \rightarrow R^k$ и $\varphi: X \rightarrow R^k$ сублинейная вектор-функция, т.е. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ и $\varphi_i: X \rightarrow R$ сублинейные функции. Если для каждого $x \in X$ существуют числа $\delta > 0$ и $K > 0$, функция $r_x: [0, \delta] \rightarrow X$ и $o_x: [0, \delta] \rightarrow R_+$, где

$\|r_x(t)\| \leq Kt \max\{\|\varphi(x)\|, \|\varphi(-x)\|\} + o_x(t)$ и $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o_x(t)}{t} = 0$ такие, что $\|F(\bar{x} + tx + r_x(t)) - F(\bar{x})\| \leq Kt \max\{\|\varphi(x)\|, \|\varphi(-x)\|\}$ при $t \in [0, \delta]$, то будем говорить, что вектор-функция F в точке $\bar{x}$ допускает сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$.

Некоторые свойства сублинейных неравенств

Лемма 2. Если $A: X \rightarrow Z$ сублинейный непрерывный оператор и

$$E = \{x \in X : A(x) \leq 0, A(-x) \leq 0\},$$

то $E = \{x \in X : A(-x) = 0, A(x) = 0\}$ и E (замкнутое) подпространство в X .

Следствие 1. Если X банахово пространство, $g_i: X \rightarrow R$ сублинейная полунепрерывная снизу функция при $i = 1, \dots, r$ и $E = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, g_i(-x) \leq 0 \text{ при } i = 1, \dots, r\}$, то $E = \{x \in X : g_i(x) = 0, g_i(-x) = 0 \text{ при } i = 1, \dots, r\}$ и E (замкнутое) подпространство в X .

Лемма 3. Если $g_i: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i = 1, \dots, k$ и $E = \{x \in X : g_i(x) = 0, g_i(-x) = 0 \text{ при } i = 1, \dots, k\}$, то существует множество индексов I и оператор $A: X \rightarrow R^I$, где $Ax = \{\langle v_s, x \rangle\}_{s \in I}$, $v_s \in D = \bigcup_{i=1}^k \partial g_i(0)$ линейные непрерывные независимые функционалы, такие, что $\dim \{v_s\}_{s \in I} = \dim D$ и $E = \{x \in X : Ax = 0\}$.

Из предложения 2.3.1[3] следует, что семейство всех множеств $\prod_{s \in I} W_s$, где I множество индексов, W_s открытое подмножество пространства R и $W_s \neq R$ только для конечного множества $s \in I$, образует базу тихоновской топологией на $R^I = \prod_{s \in I} R$ (см. также [3, с.195].

Поэтому $x^* = \{v_s\}_{s \in I}$ принадлежит сопряженному пространству $(R^I)^*$ тогда и только тогда когда v_s отлично от нуля только для конечного множества индексов $s \in I$.

Если $X = R^n$, то $\partial g_i(0) \subset R^n$. Поэтому $D = \bigcup_{i=1}^k \partial g_i(0) \subset R^n$. Пусть $\dim D = r$, где $r \leq n$. Тогда из леммы 3 следует следующее следствие.

Следствие 2. Если $g_i: R^n \rightarrow R$ сублинейная непрерывная функция при $i = 1, \dots, k$, $E = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, g_i(-x) \leq 0 \text{ при } i = 1, \dots, k\}$, то существует оператор $A: R^n \rightarrow R^r$, такой, что $E = \{x \in R^n : Ax = 0\}$, где $Ax = \{\langle v_s, x \rangle\}_{s=1}^r$, $v_s \in D = \bigcup_{i=1}^k \partial g_i(0)$ линейные непрерывные независимые функционалы и $\dim \{v_s\}_{s=1}^r = \dim D$.

Достаточные условия об аппроксимации невыпуклых функций

Лемма 4. Если X и Y банаховы пространства, отображение $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $\text{Im } F'(x_0) = Y$, то

отображение F в точке x_0 допускает сублинейную аппроксимацию $F'(x_0)(h)$ при $h \in X$.

Пусть X банахово пространство, $f: X \rightarrow R_{+\infty}$, $x_0 \in \text{dom } f = \{x \in X: f(x) < +\infty\}$ и $\delta > 0$.

Если $f: X \rightarrow R_{+\infty}$ удовлетворяет условию Липшица в δ окрестности точки x_0 , то положим (см.[4])

$$f^{[1]}(x_0; x) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x_0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda x) - f(y)}{\lambda},$$

$$f_{[1]}(x_0; x) = \liminf_{\substack{y \rightarrow x_0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda x) - f(y)}{\lambda}.$$

Множество $\partial_C f(x_0) = \{p \in X^*: \langle p, x \rangle \leq f^{[1]}(x_0; x) \text{ при } x \in X\}$ называется субдифференциалом Кларка функции f в точке x_0 (см.[4]). Ясно, что $f_{[1]}(x_0; x) = -f^{[1]}(x_0; -x)$ при $x \in X$.

Если $f_i: X \rightarrow R_{+\infty}$ удовлетворяет условию Липшица в δ окрестности точки x_0 и в определении сублинейной аппроксимации в п.2 $\varphi_i(x) = Lf_i^{[1]}(x_0; x)$ при $x \in X$, где $L > 0$, $i = 1, \dots, k$, то будем говорить, что вектор-функция $F: X \rightarrow R^k$ в точке $\bar{x}$ допускает сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$ в смысле Кларка, где $F = (f_1, \dots, f_k)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$.

Лемма 5. Если $f: X \rightarrow R$ положительно однородная липшицевая функция в окрестности точки x_0 , то $-f^{[1]}(0; -x) \leq f(x) \leq f^{[1]}(0; x)$ при $x \in X$.

Если $f: R^n \rightarrow R_{+\infty}$ собственная выпуклая функция, то положив

$$(f 0^+)(y) = \sup \{f(x + y) - f(x): x \in R^n\}$$

при $y \in R^n$ (см.[5, с.83]) , из теоремы 2.8.5 [5] имеем, что $y \rightarrow (f 0^+)(y)$ положительно однородная выпуклая собственная функция. Отсюда следует, что

$$-(f 0^+)(-y) = \inf \{f(x + y) - f(x): x \in R^n\}$$

при $y \in R^n$. Поэтому

$$-(f 0^+)(-y) \leq f(x + y) - f(x) \leq (f 0^+)(y)$$

при $y \in R^n$ и $x \in R^n$. В частности, если $x_0 \in \text{dom } f$, то отсюда следует, что $-(f 0^+)(-y) \leq f(x_0 + y) - f(x_0) \leq (f 0^+)(y)$ при $y \in R^n$.

$$\text{Положим } f'(x_0; x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda},$$

где считаем, что предел существует.

Если $f: R^n \rightarrow R_{+\infty}$ собственная выпуклая функция, $x_0 \in \text{dom } f$ и $-(f 0^+)(-y) = (f 0^+)(y)$, то используя из теоремы 2.8.8 [5] имеем, что $-f'(x_0; -y) = f(x_0 + y) - f(x_0) = f'(x_0; y)$.

Используя субдифференциал Кларка, рассмотрим аналог теоремы Люстерника.

Теорема 1. Пусть $X = R^n$, функция $f_i(x)$ удовлетворяет условию липшица в некоторой окрестности точки $x_0 \in R^n$ и $f_i(x_0) = 0$ при $i = 1, \dots, k$, для любого $p_i \in \partial f_i(x_0)$ при $i = 1, \dots, k$ векторы $(p_1, \dots, p_k)$ вместе с некоторыми векторами $a_{k+1}, \dots, a_n$ образует базис в R^n . Тогда существуют число $\alpha_0 > 0$ и отображение $r: (-\alpha_0, \alpha_0) \rightarrow R^n$ такое, что $f_i(x_0 + \alpha h + r(\alpha)) = 0$ при $i = 1, \dots, k$ и $\langle a_i, r(\alpha) \rangle = 0$ при $i = k+1, \dots, n$ и при всех $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$, а если вектор $h \in R^n$ удовлетворяет условию $f_i^{[1]}(x_0; h) = 0$ и $f_i^{[1]}(x_0; -h) = 0$ при $i = 1, \dots, k$, то $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} r(t) = 0$.

Используя из понятия скалярного субдифференциала (см.[1]) отображений в банаховом пространстве аналогично теореме 1 можно получить обобщения теоремы 1.

Ряд аналогов теоремы Фана

В этом пункте рассмотрены аналоги теоремы Фана и введено одно следствие из теоремы 2 (см.[6]).

Теорема 2. Если X и Y пространства Фреше, $C \subset X$ выпуклое множество и $\text{int } C \neq \emptyset$, $f_i: C \rightarrow R$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые непрерывные функции, $\Lambda: X \rightarrow Y$ непрерывный линейный оператор, $Ax = \Lambda x + \bar{y}$, $\bar{y} \in Y$, $\text{Im } \Lambda = Y$ и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $Ax = 0$ не имеет решения в C , то существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ и вектор $y^* \in Y^*$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in C$.

Теорема 3. Если X линейное пространство, $C \subset X$ непустое выпуклое множество, $f_i: C \rightarrow R$, $i = 1, \dots, k$, выпуклые функции,

$f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = k+1, \dots, m$ аффинные функции и система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $f_i(x) = 0$, $i = k+1, \dots, m$ не имеет решения в C , то существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m$ не равные нулю одновременно и такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \geq 0$ при всех $x \in C$.

Отметим, что в работе [6] также показано, что при дополнительных условиях в теореме 2 и 3 можно положить $\lambda_1 = 1$ (например, см. следствие 3).

Следствие 3. Если X и Y пространства Фреше, $C \subset X$ выпуклое множество, $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$, выпуклые непрерывные функции, $A : X \rightarrow Y$ непрерывный линейный оператор, $Ax = Ax + \bar{y}$, $\bar{y} \in Y$, $\text{Im } A = Y$ и система $f_0(x) < 0$, $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $Ax = 0$ не имеет решения в C , а система $f_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, k$, $Ax = 0$ имеет решения в C и существует точка $\bar{x} \in \text{int } C$ такая, что $A\bar{x} = 0$, то существуют числа $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ и вектор $y^* \in Y^*$ такие, что $f_0(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in C$.

Необходимые условия экстремума

Пусть $I_C(x_0)$ ($T_C(x_0)$) множество всех гиперкасательных (касательных) к множеству C в точке $x_0 \in C$ и $N_C(x_0) = T_C^-(x_0)$ (см. [4]).

Пусть $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in J = \{0, 1, \dots, k\}$, $F : X \rightarrow Y$, $C \subset X$. Рассмотрим задачу $f_0(z) \rightarrow \min$, $z \in \{x \in C : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k, F(x) = 0\}$ (1)

Теорема 4. Если X и Y банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o_i(1), \delta)$ локально верхнее полулипшицеву условию в точке x_0 при $i \in J$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i \in J$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, оператор $F : X \rightarrow Y$ строго дифференцируем в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Отметим, что если $C \subset X$ выпуклое множество и $\text{int } C \neq \emptyset$, то из леммы [4, с.95]

следует, что $I_C(x_0) \neq \emptyset$.

Следствие 4. Если X и Y банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (1), функции f_i удовлетворяют липшицеву условию в окрестности точки x_0 при $i \in J$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, оператор $F : X \rightarrow Y$ строго дифференцируем в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $y^* \in Y^*$ и

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0 \quad \text{такие, что}$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i f_i^{[1]}(x_0, x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0 \quad \text{при } x \in T_C(x_0).$$

Через $L(X, Y)$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов из X в Y .

Теорема 5. Если X банахово пространство, Y банахово k пространство (см. [7, с.50]), x_0 -точка локального минимума в задаче (1), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o_i(1), \delta)$ локально верхнее полулипшицеву условию в точке x_0 при $i = 0, 1, \dots, k$, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i = 0, 1, \dots, k$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, оператор F допускает сублинейную аппроксимацию $B(x)$ в точке x_0 , где $B : X \rightarrow Y$ сублинейный непрерывный оператор, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$ и $PX = Y$ при $P \in \partial B = \{A \in L(X, Y) : B(x) \geq Ax \text{ при } x \in X\}$, то существуют линейный непрерывный оператор $A : X \rightarrow Y^1$, где $Ax = \{A_s x\}_{s \in I}$, $A_s \in \partial B$ при $s \in I$, $\{A_s\}$ при $s \in I$ линейно независимы, $\dim \{A_s\}_{s \in I} = \dim \partial B$, и одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ и $y^* \in (Y^1)^*$ такие, что $\sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Пусть $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in T$, $F : X \rightarrow Y$, $C \subset X$. Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min, \quad z \in \{x \in C : f_t(x) \leq 0, t \in T, F(x) = 0\}. \quad (2)$$

Следствие 5. Если X и Y банаховы пространства, x_0 -точка локального минимума в задаче (2), функция f_0 удовлетворяет $\varphi_0 - (o(1), \delta)$ локально верхнее полулипшицеву условию в точке x_0 , $\varphi_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейная непрерывная функция, T компактное множе-

ство, $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$, функция $x \rightarrow f(x, t)$ выпукла и существует окрестность U точки x_0 такая, что для всякого x из U функция $t \rightarrow f(x, t)$ полунепрерывна сверху в T , для любого $t \in T$ функция $x \rightarrow f(x, t)$ непрерывна в точке x_0 , $g(x) = \max_{t \in T} f(x, t)$, оператор $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируем в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 g'(x_0, x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Из следствия 5 следует, что существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что

$$0 \in \partial(\alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 g'(x_0, x) + \langle y^*, F'(x_0)x \rangle + \delta_{T_C(x_0)}(x))_{x=0}.$$

Поэтому $0 \in \alpha_0 \partial \varphi_0(0) + \alpha_1 \partial g(x_0) + F'(x_0)^* y^* + N_C(x_0)$. Тогда из предложения 4.4[8] следует, что $0 \in \alpha_0 \partial \varphi_0(0) + \alpha_1 \overline{\text{co}} \bigcup_{t \in T(x_0)} \partial f(x_0, t) + F'(x_0)^* y^* + N_C(x_0)$, где

$$T(x_0) = \{t \in T: g(x_0) = f(x_0, t)\} \text{ (см. также [9]).}$$

Рассмотрим задачу

$$f_0(z) \rightarrow \min,$$

$$z \in \{x \in C: f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k, f_i(x) = 0, i = k+1, \dots, m\}. \quad (3)$$

Теорема 6. Если x банахово пространство, x_0 -точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o_i(1), \delta)$ локально верхнее полулипшицеву условию в точке x_0 при $i = 0, 1, \dots, k$, $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ сублинейные непрерывные функции при $i = 0, 1, \dots, k$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, вектор-функция $f = (f_{k+1}, \dots, f_m)$ допускает сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$ в точке x_0 , $\varphi = (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m)$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow R^1$, где $Ax = \{\langle v_s, x \rangle\}_{s \in I}$, $v_s \in D = \bigcup_{i=k+1}^m \partial \varphi_i(0)$ при $s \in I$, $\{v_s\}$ при $s \in I$ линейно независимы, $\dim \{v_s\}_{s \in I} = \dim D$, и одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ и $y^* \in (R^1)^*$ такие, что $\sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0$ при $x \in T_C(x_0)$.

Отметим, что случай $\bigcup_{i=k+1}^m \partial \varphi_i(0) = \{0\}$ тривиален.

Замечание 1. Если

$$E = \{x \in X: \varphi(x) = 0, \varphi(-x) = 0\}$$

и выполняются условия теоремы 6, x_0 -точка локального минимума в задаче (3) и $E \cap I_C(x_0) \neq \emptyset$, то из доказательства теоремы 6 следует, что существуют одновременно не равные нулю числа $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ такие, что $\sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in E \cap T_C(x_0)$.

Так как $y^* \in (R^1)^*$, то ненулевые координаты вектора y^* конечны.

Следствие 6. Если выполняются условия теоремы 6, x_0 -точка локального минимума в задаче (3), то существуют $u_i^* \in \partial \varphi_i(0)$ и $v_i^* \in \partial \varphi_i(0)$ при $i = k+1, \dots, m$ и одновременно не равные нулю числа $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$, $\alpha_{k+1}^+ \geq 0, \dots, \alpha_m^+ \geq 0$,

$$\alpha_{k+1}^- \leq 0, \dots, \alpha_m^- \leq 0 \text{ такие, что } \sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i^+ \langle u_i^*, x \rangle + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i^- \langle v_i^*, x \rangle \geq 0 \text{ при } x \in T_C(x_0),$$

где подмножество, состоящее из ненулевых элементов множества $\{\alpha_i^+ u_i^*, \alpha_i^- v_i^*: i = k+1, \dots, m\}$ линейно независимо.

Отметим, что

$$\alpha_i^+ u_i^* + \alpha_i^- v_i^* = (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) \left(\frac{\alpha_i^+}{\alpha_i^+ + \alpha_i^-} u_i^* + \frac{\alpha_i^-}{\alpha_i^+ + \alpha_i^-} v_i^* \right).$$

Следствие 7. Если x банахово пространство, x_0 -точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0 при $i = 0, 1, \dots, m$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, вектор-функция $f = (f_{k+1}, \dots, f_m)$ допускает сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$ в точке x_0 в смысле Кларка, где

$$\varphi(x) = (f_{k+1}^{[1]}(x_0; x), \dots, f_m^{[1]}(x_0; x)), \quad \varphi_i(x) = f_i^{[1]}(x_0; x),$$

$i = k+1, \dots, m$, $C \subset X$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существуют линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow R^1$, где $Ax = \{\langle v_s, x \rangle\}_{s \in I}$, $v_s \in D = \bigcup_{i=k+1}^m \partial \varphi_i(0)$ при $s \in I$, $\dim \{v_s\}_{s \in I} = \dim D$, v_s при $s \in I$ линейно независимы, и одновременно не равные нулю

$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ и $y^* \in (R^1)^*$ такие, что

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i f_i^{[1]}(x_0; x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0 \quad \text{при } x \in T_C(x_0).$$

Из следствия 7 следует, что существуют векторы $u_i^* \in \partial_C f_i(x_0)$ и $v_i^* \in \partial_C f_i(x_0)$ при $i = k+1, \dots, m$ и одновременно не равные нулю числа $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0, \alpha_{k+1}^+ \geq 0, \dots, \alpha_m^+ \geq 0, \alpha_{k+1}^- \leq 0, \dots, \alpha_m^- \leq 0$ такие, что

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i f_i^{[1]}(x_0; x) + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i^+ \langle u_i^*, x \rangle + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i^- \langle v_i^*, x \rangle \geq 0 \quad \text{при } x \in T_C(x_0),$$

где подмножество, состоящее из ненулевых элементов множества $\{\alpha_i^+ u_i^*, \alpha_i^- v_i^* : i = k+1, \dots, m\}$ линейно независимо.

Отметим, что

$$\alpha_i^+ \langle u_i^*, x \rangle + \alpha_i^- \langle v_i^*, x \rangle \leq \alpha_i^+ f_i^{[1]}(x_0; x) - \alpha_i^- f_i^{[1]}(x_0; -x)$$

при $x \in X$ и $i = k+1, \dots, m$.

Теорема 7. Если $X = R^n$, x_0 -точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (o_i(1), \delta)$ локально верхнее полулиппшицеву условию в точке x_0 при $i = 0, 1, \dots, k$, $\varphi_i : X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i = 0, 1, \dots, k$, $f_j(x_0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, вектор-функция $f = (f_{k+1}, \dots, f_m)$ допускает в точке x_0 сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$, где $\varphi = (\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m)$, $C \subset R^n$, $I_C(x_0) \neq \emptyset$, то существует оператор $A : R^n \rightarrow R^r$, где $Ax = (\langle x_1^*, x \rangle, \dots, \langle x_r^*, x \rangle)$, $x_j^* \in D = \bigcup_{i=m+1}^k \partial \varphi_i(0)$ при $j = 1, \dots, r$, $\dim \{x_j^*\}_{j=1}^r = \dim D$, $\{x_j^*\}_{j=1}^r$ линейно независимы, и одновременно не равные нулю числа $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ и $\beta_1, \dots, \beta_r$ такие, что

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^r \beta_j \langle x_j^*, x \rangle \geq 0 \quad \text{при } x \in T_C(x_0).$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1 вектор-функция $f = (f_{k+1}, \dots, f_m)$ до-

пускает сублинейную аппроксимацию $\varphi(x)$ в точке x_0 . Если $C \subset R^n$ замкнутое множество, то $I_C(x_0) = \text{int } T_C(x_0)$.

Теорема 8. Если X банахово пространство, $x_0 = 0$ -точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет липшицеву условию в окрестности точки $x_0 = 0$ при $i = 0, 1, \dots, m$, $f_j(0) = 0$ при $j = 1, \dots, k$, функции f_i положительно однородны при $i = k+1, \dots, m$, $C \subset X$, $I_C(0) \neq \emptyset$, то существуют линейный непрерывный оператор $A : X \rightarrow R^1$, $Ax = \{\langle v_s, x \rangle\}_{s \in I}$, $v_s \in D = \bigcup_{i=k+1}^m \partial_C f_i(0)$ при $s \in I$, $\dim \{v_s\}_{s \in I} = \dim D$, v_s при $s \in I$ линейно независимы, и одновременно не равные нулю числа $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$, $y^* \in (R^1)^*$ такие, что

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i f_i^{[1]}(0; x) + \langle y^*, Ax \rangle \geq 0 \quad \text{при } x \in T_C(0).$$

Заметим, что, используя следствия теоремы Фана, можно также показать, что при дополнительных условиях в теоремах 4–8 можно положить $\alpha_0 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
2. Байокки К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1980, 326 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986, 751 с.
4. Clarke F.H. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer, London, 2013, 591 p.
5. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 467 с.
6. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в задачах с ограничениями. // XVI international correspondence scientific specialized conference «international scientific review of the technical sciences, mathematics and computer science» (Boston. USA. July 12-13, 2020), p.5-17.
7. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Субдифференциальное исчисление. Новосибирск.: Наука, 1987, 223 с.
8. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
9. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and applications. Springer, Switzerland, 2018, 622 с.

Институт прикладной математики при БГУ
misreddin08@rambler.ru

QABARIQ OLMAYAN FUNKSIYANIN APPROKSİMASİYASI VƏ EKSTREMUM ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

M.A. Sadıqov

İşdə Banax fəzasında məhdudiyyətli hamar olmayan ekstremal məsələnin ekstremumu üçün birinci tərtib zəruri şərt alınmışdır. Funksiyanın nöqtənin ətrafında bir sıra approksimasiyası tərif olunub və onun bir sıra xassələri öyrənilmişdir.

Açar sözlər: *subxətti funksiya, lipşis funksiya, lokal minimum*

APPROXIMATION OF NONCONVEX FUNCTIONS AND NECESSARY CONDITION OF AN EXTREMUM

M.A. Sadygov

In this paper, necessary first-order extremum conditions are obtained for nonsmooth extremum problems in the presence of restrictions in a Banach space. A number of definitions of function approximation in a neighborhood of a point are considered and a number of their properties are studied.

Keywords: *sublinear function, Lipschitz function, local minimum*