

FİZİKA-RİYAZİYYAT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ

УДК 004.942:519.711.3

ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА
ПО ДАННЫМ GPSАкадемик НАНА Ф.А. Алиев^{1,2}, Н.Г. Джавадов³, М.М. Муталлимов^{1,2}

В статье описаны общие принципы стабилизации полета квадрокоптером с использованием данных спутниковой навигационной системы GPS. На базе математической модели движения квадрокоптера рассмотрены три различные дискретные линейно-квадратичные гауссовы задачи, которые можно решать параллельно независимо друг от друга. В качестве наблюдения используются данные спутниковой навигационной системы GPS, такие как координаты центра тяжести квадрокоптера, а также проекции скорости летательного аппарата по координатным осям.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, стабилизации движением, спутниковая навигационная система GPS, LQG-задача

Введение

Использование в последнее время беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), в том числе и квадрокоптеров в различных областях деятельности жизни, особенно в военной сфере, привлекло внимание ученых и специалистов к этим видам летательных аппаратов. Благодаря развитию современных математических пакетов прикладных программ в настоящее время разрабатываются различные подходы по управлению и стабилизации движений этих летательных аппаратов. Отметим, что наряду с разработкой математического моделирования и управления движением квадрокоптера [1, 2], особое место занимают задачи стабилизации и построения оптимальных регуляторов [3, 4]. Так, например, в работе [5] построен регулятор для управления и стабилизации движением квадрокоптера в трехмерном пространстве. Однако, в этой и многих прочих работах подразумевается, что все координаты движения летательного аппарата известны или измеряются точно и нет никаких случайных воздействий. А на практике в математической модели при-

сутствуют случайные воздействия и при наблюдении или при измерении имеются случайные ошибки. В таких случаях невозможно применение методик, изложенных в работах [3-5]. Приходится применять другие методы построения оптимальных регуляторов. Одним способом построения таких регуляторов возможно через решение задачи построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой (ЛКГ) задачи в установившемся режиме, которое изложено в [6-8] для непрерывного случая, т.е. уравнение и наблюдение задаются в непрерывном виде. Используя метод построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой (ЛКГ) задачи, постараемся решать проблему стабилизации полета квадрокоптером с использованием данных спутниковой навигационной системы GPS. Отметим, что при решении задачи стабилизации полета квадрокоптером по данным GPS, наблюдение движением квадрокоптера осуществляется дискретно, иными словами, данные от спутниковой навигационной системы получаются по дискретному времени через

некоторый промежуток времени. Поэтому, целесообразно использовать дискретную линейно-квадратичную гауссовую задачу. В работе [9] разработан алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме в более общем случае, чем в [7, 8].

В предлагаемой работе на базе математической модели движения квадрокоптера [1, 2] рассматриваются три различные дискретные линейно-квадратичные гауссовые задачи, которые можно решать параллельно независимо друг от друга. Сначала как в работах [2, 5], предлагается алгоритм управления высотой полета по оси z и углом рыскания φ . Далее, разрабатываются алгоритмы управления движением по оси y и углом крена φ , а также управления движением квадрокоптера по оси x и углом тангажа θ . В качестве наблюдения используются данные спутниковой навигационной системы GPS, а точнее координаты (x, y, z) центра тяжести квадрокоптера, а также проекции скорости летательного аппарата по координатным осям. Отметим, что при наблюдении только одна из них соответствующая задача оказывается неразрешенной.

Постановка задачи

Допустим, что летательный аппарат в качестве квадрокоптера движется относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, связанной с Землей и заданной перпендикулярными друг другу координатными осями O_x , O_y и O_z , причем ось O_z , направлена противоположно вектору силы тяжести. Задача заключается в том, что квадрокоптер перемещался из начальной точки (x_0, y_0, z_0) с начальными углами рыскания φ_0 , крена φ_0 и тангажа θ_0 к заданной точке (x_d, y_d, z_d) с заданными углами рыскания φ_d , крена φ_d и тангажа θ_d . Как мы отметили во введении,

эта задача в детерминированном случае решена в работах [3-5]. Сейчас, используя метод построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой (ЛКГ) задачи, попытаемся решать проблему стабилизации полета квадрокоптером с использованием данных спутниковой навигационной системы GPS. Как показано в [3-5], математическая модель движения такого летательного аппарата описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x} = -u \sin \theta, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = u \cos \theta \sin \varphi, \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta \cos \varphi - mg, \quad (3)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta, \quad (5)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi. \quad (6)$$

Здесь m – масса аппарата квадрокоптера, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести, u , а также $\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi$ – управляющие воздействия, которые являются функциями подъемных сил f_i i -го двигателя M_i ($i = \overline{1,4}$). Необходимо отметить, что воздействие u используется для управления высотой положения аппарата, а управление $\tilde{\tau}_\psi$ позволяет стабилизировать угол рыскания. Согласно [3-5], воздействия $\tilde{\tau}_\theta$ и $\tilde{\tau}_\phi$ используются для управления углами θ и φ , и перемещением аппарата по осям x и y соответственно. Как показано в [5] предположении $\cos \theta \cos \varphi \neq 0$ и после соответствующей квазилинеаризации для управления высотой полета z и углом рыскания φ аппарата имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{P}^1(t) &= \tilde{F}_1 P^1(t) + \tilde{F}_1 u^1(t) + \omega^1(t), \\ P^1(t_0) &= P_0^1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega^1(t)$ – ошибка при квазилинеаризации,

$$P_1(t) = \left[z(t) - z_d, \frac{d}{dt}(z(t) - z_d), \psi(t) - \psi_d, \frac{d}{dt}(\psi(t) - \psi_d) \right],$$

а

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$u^1(t) = \begin{bmatrix} \tau_z \\ \tau_\psi \end{bmatrix}.$$

Наблюдение за движением по оси z осуществляется через

$$s^1(\tau) = H^1 P^1(\tau) + v^1(\tau) \quad (8)$$

для $\tau \leq t$, где v^1 – случайные погрешности измерения.

Требуется найти такое управляющее воздействие u^1 как функция от наблюдения s^1 , которое минимизирует квадратичный функционал

$$J_1 = E \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty [(P^1)^T (u^1)^T] \begin{bmatrix} A_1 & N_1 \\ (N_1)^T & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^1 \\ u^1 \end{bmatrix} dt \right\}. \quad (9)$$

Отметим, полученная задача (7)-(9) является линейно-квадратичной гауссовой задачей.

Аналогично, для управления движением по оси y и углом крена φ получаем следующую линейно-квадратичную гауссовую задачу

$$\dot{P}^2(t) = \tilde{F}_2 P^2(t) + \tilde{G}_2 u^2(t) + \omega^2(t),$$

$$P^2(t_0) = P_0^2, \quad (10)$$

$$P^2(t) = \left[(y(t) - y_d), \frac{d(y(t) - y_d)}{dt}, (\varphi(t) - \varphi_d), \frac{d(\varphi(t) - \varphi_d)}{dt} \right]^T$$

$$\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u_\tau^2(t) = \tau_\varphi,$$

$$s^2(\tau) = H^2 P^2(\tau) + v^2(\tau), \quad \tau \leq t, \quad (11)$$

$$J_2 = E \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty [(P^2)^T (u^2)^T] \begin{bmatrix} A_2 & N_2 \\ (N_2)^T & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^2 \\ u^2 \end{bmatrix} dt \right\}. \quad (12)$$

Точно так же, получаем линейно-квадратичную гауссовую задачу для управления движением по оси x и углом тангажа θ

$$\dot{P}^3(t) = \tilde{F}_3 P^3(t) + \tilde{G}_3 u^3(t) + \omega^3(t),$$

$$P^3(t_0) = P_0^3, \quad (13)$$

$$P^3(t) = \left[(x(t) - x_d), \frac{d(x(t) - x_d)}{dt}, (\theta(t) - \theta_d), \frac{d(\theta(t) - \theta_d)}{dt} \right]^T,$$

$$\tilde{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u^3(t) = \tau_\theta,$$

$$S^3(\tau) = H^3 P^3(\tau) + v^3(\tau), \quad \tau \leq t, \quad (14)$$

$$J_3 = E \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty [(P^3)^T (u^3)^T] \begin{bmatrix} A_3 & N_3 \\ (N_3)^T & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^3 \\ u^3 \end{bmatrix} dt \right\}. \quad (15)$$

Поставленные выше линейно-квадратичные гауссовые задачи (7)-(9), (10)-(12) и (13)-(15) являются непрерывными задачами. Это означает, что наблюдение должно осуществляться в любых значениях времени. Однако, данные от GPS получаются дискрет-

но, т.е. через некоторое дискретное время. И поэтому, целесообразно, с помощью аппроксимации необходимо привести непрерывные задачи к дискретным, а затем решать полученные дискретные линейно-квадратичные гауссовы задачи.

Отметим, что в работе [7] предложен алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме. Для наглядности приведем некоторые факты из этой работы.

Пусть движение объекта описывается уравнением

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i + \omega_i, \quad (16)$$

и во временном состоянии i проводятся измерения z_i , которые линейно связаны с состоянием траектории x_i

$$z_i = Hx_i + v_i, \quad (17)$$

где ω_i – вектор случайных внешних возмущений, а v_i – вектор случайных погрешностей измерений, которые предполагаются гауссовыми случайными величинами типа «белый шум». Кроме того, как в [6] математические ожидания для случайных величин x_0 , ω_i и v_i имеют вид

$$E(\omega_i) = E(v_i) = E(x_0) = 0, \quad (18)$$

а корреляционные матрицы определены в виде

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad (19)$$

$$E\{x_0 x_0^T\} = P_0, \quad E\{x_0 v_j^T\} = E\{x_0 \omega_j^T\} = 0 \quad (20)$$

Требуется найти такое управляющее воздействие u_i как функция от наблюдения z_i , которое минимизирует квадратичный функционал

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} [x_i^T \ u_i^T] \begin{bmatrix} A & N \\ N^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} \right\} \quad (21)$$

Для решения линейно-квадратичной гауссовой задачи (16)-(21) в работе [7] предложен следующий алгоритм.

Алгоритм.

1. Формируются матрицы $\Phi, \Gamma, H, Q, R, A, B, N$.

2. Решается МАУР

$$S = \Phi^T S \Phi - C^T (B + \Gamma^T S \Gamma) C + A \quad (22)$$

и находится положительно-определенное решение – матрица S .

3. Решается МАУР

$$M = \Phi M \Phi^T - \Phi M H^T (H M H^T + R)^{-1} H M^T \Phi^T + Q \quad (23)$$

и находится положительно-определенное решение – матрица M .

4. Формируются матрицы C из

$$C = (\Gamma^T S \Gamma + B)^{-1} (\Gamma^T S \Phi + N^T) \quad (24)$$

и K из

$$K = M H^T (H M H^T + R)^{-1}. \quad (25)$$

5. Определяется оптимальная оценка \hat{x}_i из

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= [\Phi - K H \Phi] \hat{x}_i + [\Gamma - K H \Gamma] u_i + K z_{i+1}, \\ \hat{x}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

и оптимальный регулятор u_i из

$$u_i = -C \hat{x}_i. \quad (27)$$

Для того, чтобы применять алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой задачи (16)-(21) в установившемся режиме, приведем посредством аппроксимации непрерывные линейно-квадратичные гауссо-

вые задачи (7)-(9), (10)-(12) и (13)-(15) к дискретным линейно-квадратичные гауссовым задачам вида (16)-(21). Сначала аппроксимируем задачу (7)-(9) для управления высотой полета Z и углом рыскания ψ .

Обозначая $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, $P_i^1 = P^1(t_i)$, $u_i^1 = u^1(t_i)$ и аппроксимируя $\dot{P}^1(t)$ как

$$\dot{P}^1(t_i) = \frac{d}{dt} P^1(t_i) \approx \frac{P_{i+1}^1 - P_i^1}{\Delta t},$$

из (7) получим

$$P_{i+1}^1 = \Phi^1 P_i^1 + \Gamma^1 u_i^1 + \omega_i^1, \quad (28)$$

$$\text{где } \Phi^1 = E + \Delta t \tilde{F}_1, \quad \Gamma^1 = \tilde{G}_1.$$

Предположим, наблюдение через спутниковую навигационную систему GPS осуществляется формулой

$$S_i^1 = H^1 P_i^1 + \nu_i^1, \quad (29)$$

где $H^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. А это означает, что

GPS измеряет координаты и скорость движения аппарата по оси z . При дискретизации функционал (9) переходит

$$J_1 = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} [(P_i^1)^T (u_i^1)^T] \begin{bmatrix} A_1 & N_1 \\ (N_1)^T & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^1 \\ u_i^1 \end{bmatrix} \right\} \quad (30)$$

Далее, предположим, что выполняются аналогичные (18)-(20) условия при $x_0 = P_0^1$,

$$\omega_i = \omega_i^1, \quad \nu_i = \nu_i^1, \quad A = A_1, \quad B = B_1, \quad N = N_1,$$

$Q = Q_1, \quad R = R_1$. Тогда если обозначать

$$x_i = P_i^1, \quad u_i = u_i^1, \quad H = H^1 \text{ и } s_i = s_i^1, \text{ то задача}$$

(28)-(30) с дополнительными условиями перейдет к линейно-квадратичной гауссовой задаче (16)-(21), для которой можно применять предложенный выше алгоритм. Параметры в условиях (18)-(20) определим в виде $Q_1 = 10^{-3} E_{4,4}$, $R_1 = E_{2,2}$, $A_1 = E_{4,4}$, $B_1 = E_{2,2}$, $N_1 = O_{4,2}$, где $E_{k,k}$ – единичная

матрица размерности $k \times k$, а O_{kl} – нулевая матрица размерности $k \times l$.

Аналогично, аппроксимируя задачи (10)-(12) и (13)-(15) мы получим следующие дискретные линейно-квадратичные гауссовые задачи, которые позволяют построить регуляторы для управления движением летающего аппарата соответственно по оси y с углом крена φ и по оси x и углом тангажа θ . Из задачи (10)-(12) при $P_i^2 = P^2(t_i)$, $u_i^2 = u^2(t_i)$ получим

$$P_{i+1}^2 = \Phi^2 P_i^2 + \Gamma^2 u_i^2 + \omega_i^2, \quad (31)$$

$$\text{где } \Phi^2 = E + \Delta t \tilde{F}_2, \quad \Gamma^2 = \tilde{G}_2.$$

$$s_i^2 = H^2 P_i^2 + \nu_i^2 \quad (32)$$

$$J_2 = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} [(P_i^2)^T (u_i^2)^T] \begin{bmatrix} A_2 & N_2 \\ (N_2)^T & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^2 \\ u_i^2 \end{bmatrix} \right\}. \quad (33)$$

В качестве параметров будем брать

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = E_{4,4},$$

$$R_2 = E_{2,2}, \quad A_2 = E_{4,4}, \quad B_2 = 1,$$

$$N_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Для задачи (13)-(15) при $P_i^3 = P^3(t_i)$,

$u_i^3 = u^3(t_i)$ получим

$$P_{i+1}^3 = \Phi^3 P_i^3 + \Gamma^3 u_i^3 + \omega_i^3 \quad (34)$$

$$\Phi^3 = E + \Delta t \tilde{F}_3, \quad \Gamma^3 = \tilde{G}_3.$$

$$s_i^3 = H^3 P_i^3 + \nu_i^3 \quad (35)$$

$$J_3 = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} [(P_i^3)^T (u_i^3)^T] \begin{bmatrix} A_3 & N_3 \\ (N_3)^T & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^3 \\ u_i^3 \end{bmatrix} \right\} \quad (36)$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = E_{4,4},$$

$$R_3 = E_{2,2}, \quad A_3 = E_{4,4}, \quad B_3 = 1,$$

$$N_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Данная задача решена для конкретного примера. Предполагается, что информация от спутниковой навигационной системы GPS поступает дискретно согласно вычисленным значениям заданной функции (красная линия в графике) и на основе этих данных разрабатывается алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме и определяется движение квадрокоптера (синяя линия в графике).

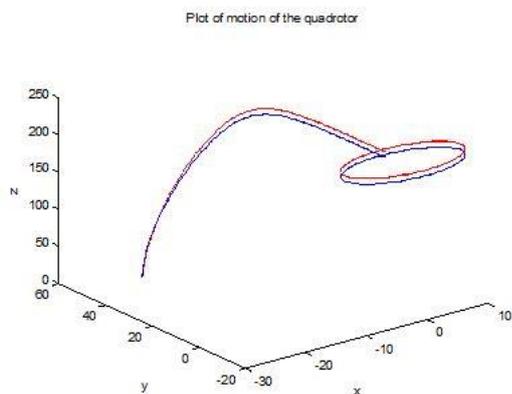


Рис.1. График движения квадрокоптера

ЛИТЕРАТУРА

1. Castillo P., Lozano R., Dzul A. Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors // IEEE Control Systems Magazine. December, 2005. P. 45 – 55.
2. Larin V.B., Tunik A.A. Synthesis of the Quad-rotor Control Algorithms in the Basic Flight Modes // TWMS Journal of Pure and Appl. Math. 2018. 9, N2. P. 147 – 158.
3. Larin V.B., Tunik A.A. Ilynska S.I. Some algorithms for unmanned aerial vehicles navigation / Outskirts, 2020, 204 p.
4. Aliev F.A., Larin V.B., Veliyeva N.I. Algorithms of synthesis of optimal regulators / Outskirts, 2021, 202 p.
5. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Tunik A.A., Veliyeva N.I., Rasulova U.Z., Mirsaabov S.M. Constructing an optimal controller for maneuver of quadrotor in 3-d space // TWMS J. Pure Appl. Math., V.13, N.2, 2022, pp.211-221.
6. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления / М.: Мир, 1972. 544 с.
7. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления / Киев: Наукова Думка, 1978, 327 с.
8. Ларин В.Б., Алиев Ф.А. О решении алгебраических уравнений Риккати// В сб. «Дискретные системы управления», 1973, с.15-39.
9. Муталлимов М.М., Джавадов Н.Г., Расулова У.З., Велиева Н.И., Алиев Ф.А. Алгоритм построения оптимальных регуляторов и фильтров для дискретной линейно-квадратичной гауссовой задачи в установившемся режиме // Proceedings of IAM, V.11, N.2, 2022, pp.113-119

¹НИИ Прикладной математики при БГУ

²Институт информационных технологий
Министерства науки и образования Азербайджана

³Национальное Аэрокосмическое Агентство
f_aliev@yahoo.com

GPS VERİLƏNLƏRİ İLƏ KVADROKOPTERİN HƏRƏKƏTİNİN TƏNZİMLƏNMƏSİ PROBLEMLƏRİ

F.Ə. Əliyev, N.H. Cavadov, M.M. Mütəllimov

Məqalədə GPS peyk naviqasiya sistemindən alınan məlumatlardan istifadə etməklə, kvadrokopterin uçuşunun sabitləşdirilməsinin ümumi prinsipləri təsvir edilmişdir. Kvadrokopterin hərəkətinin riyazi modeli əsasında üç müxtəlif diskret xətti-kvadrat Gauss məsələsi nəzərdən keçirilir ki, bunlar da paralel olaraq bir-birindən asılı olmayaraq həll edilə bilər. Müşahidə kimi GPS peyk naviqasiya sistemindən alınan məlumatlar, məsələn, kvadrokopterin ağırlıq mərkəzinin koordinatları, habelə koordinat oxları üzrə təyyarənin sürətinin proyeksiyası kimi məlumatlar istifadə olunur.

Açar sözlər: pilotsuz uçuş aparartalı, kvadrokopter, hərəkətin tənzimlənməsi, GPS peyk naviqasiya sistemi, LQG məsələsi

PROBLEMS OF STABILIZATION BY MOTION OF QUADROCOPTER BY GPS DATA

F.A. Aliyev, N.H. Javadov, M.M. Mutallimov

The article describes the general principles of quadcopter flight stabilization using data from the GPS satellite navigation system. Three different discrete linear-quadratic Gaussian problems are considered on the basis of a mathematical model of quadcopter motion, which can be solved independently of each other in parallel. As an observation, data from the GPS satellite navigation system are used, such as the coordinates of the center of gravity of the quadcopter, as well as the projection of the speed of the aircraft along the coordinate axes.

Keywords: unmanned aerial vehicle, quadcopter, motion stabilization, GPS satellite navigation system, LQG problem